App. Mil.
1041

Der
Badischen
Landschaft
gewidmet

Ballistik,

oder

Anwendung der Parabellehre auf das Bombenwerfen.

Von

Johann Georg Prändel,
[illegible] Lehrer der Physik [illegible]
auf dem [illegible]
zu [illegible]

<36622204700017

<36622204700017

Bayer. Staatsbibliothek

app Mil. 104.

Prändel

R

Die Ballistik,

oder

Anwendung der Parabellehre

auf das

Bombenwerfen.

Von

Johann Georg Prändel,

öffentlichen Lehrer der Physik und Mathematik
auf dem kurfürstlichen Schulhause
zu Amberg.

München,
bey Joseph Lentner, 1801.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Nro. 1840.

Die Ballistik, oder Anwendung der Parabellehre auf das Bombenwerfen ꝛc.

Imprimatur.

München, am 28. Oktober, 1800.

Churfürstliche Büchercensur = Special-Commission.

Westenrieder, Direktor.

Registr. fol. 210.

von Bube.

Bayerische Staatsbibliothek München

Vorrede.

Wer mir mit den heutigen großen Philosophen menschliche Erkenntnisse a priori zugiebt, und sollten es auch nur solche Erkenntnisse seyn, die sich durch gültige Schlüße erobern lassen, den wird es gewiß nicht befremden, wenn er mathematikkundige Männer über eine Kunst, wovon sie eben nicht viel praktische Kenntnisse besitzen, ihre Lehrgebäude aufstellen sieht. Es wird ihn um so weniger befremden können, je mehr er in Erwägung zieht, welch' entscheidenden Schriftstellerruhm sich der bekannte Struensee um die Taktik erworben habe, da doch dessen Amtsberuf mit der Ausübung dieser Kunst in gar keinem Verhältniß stand, und er bloß aus den untrüglichen Sätzen der Grössenlehre, dieser einzigen Wahrheitsquelle, zu schöpfen bemüßigt war. Er wird vielmehr, anstatt sich zu verwundern, den richtigen Schluß machen: Wenn die Mathematik im Stande ist, den

ungeheuern Himmelskörpern ihre unendlich großen Bahnen unabänderlich vorzuzeichnen, welches heut zu Tag Niemand läugnet, so wird sie es wohl auch vermögen, so kleinen Körpern, wie die Bomben sind, und derer Bewegung von ähnlichen Ursachen abhängt, ihre spannlangen Fluglinien zu bestimmen. Freylich muß man mir hierinfalls ein Paar nothwendige Voraussetzungen, auf die ich mich durchgehends einschränke, zugestehen. Sie bestehen darinn: daß erstens der Probeschuß mit aller Genauigkeit gemacht werde; zweytens: daß man bey allen Würfen, die nach so einem Probeschuß zu reguliren sind, das bekannte ceteris paribus im strengsten Sinne beobachte.

Indeß wird meine Bemühung demungeachtet für die Feinde der Theorie, die die Praktik als die einzige Schöpferinn alles menschlichen Wissens und Könnens ausposaunen, immer ein Stein des Anstosses bleiben. Gegen Leute dieses Schlages habe ich keine kräftigere Art, sie zu widerlegen, oder wenigst ihr Geschrey zu stillen, als erprobte Thatsachen. Sie mögen den Bericht

lesen, den der große Gelehrte und Praktiker **Belidor** hierüber erstattet, und welchen ich hier in einer getreuen Uebersetzung einrücke:

„Als gegen das Ende des 1725sten Jahres meine Tabellen fertig wurden, so wünschte Jedermann Proben damit zu machen. — Man fieng bey der Ladung eines Mörsers mit einem Pfund Pulver ohne Erde an, und man richtete ihn auf einem Winkel von 15 Grad. Man warf 2 Bomben, die fast gleich weit fielen. Hierauf warf man eben diese Bomben mit 1 Pfund Pulver unter einem Winkel von 45 Grad, um zu sehen, ob die Schußweiten doppelt so groß seyn würden (**wie es die Theorie angiebt.**) Man fand die Weiten so, wie man sie vermuthet hatte. Man fand eine gleiche Richtigkeit bey einer zwey- oder dreypfündigen Ladung, und die Schußweiten unter 45 Grad fielen immer doppelt so groß aus, als die von 15 Grad.“

„Da man nun von der Gewißheit des Grundsatzes, nach welchem unsere Tabellen verfertiget waren, überzeugt war, so begehrte Hr. **Tuffereau**, Commandant unsrer

Schule zu la Fére, daß man eine Bombe auf 40 Toisen werfen möchte. Man suchte in den Tabellen, die nach der Theorie der Parabel calculirt waren, die dazu gehörige Richtung nach Maaßgabe des Probeschußes auf, und warf mit 1 Pfund Pulver die erste Bombe auf 39 Toisen, und die zwote auf 41. Er verlangte darauf 2 andere Bomben mit eben derselben Ladung auf 70 Toisen zu werfen, und nachdem man die Erhöhung des Mörsers in den Tabellen gesucht hatte, fiel die erste auf 71 Toisen, und die zwote auf 71 Toisen und 4 Schuh."

„Man lud hierauf den Mörser mit 2 Pfund Pulver noch immer ohne Erde, um Bomben auf weitere Distanzen zu werfen. Bey jeder neuen Ladung that man auch einen neuen Probeschuß. Man that den Vorschlag, zwo Bomben auf 100 Toisen zu werfen; die erste fiel auf 102, und die andere auf 100 Toisen und 5 Schuh. Man sollte abermal zwo Bomben auf 120 Toisen werfen; die erste fiel um ein gutes zu kurz, weil an der Verkeilung des Mörsers etwas verrückt war: die zwote aber wurde unter eben dem Grade der Erhöhung als die

vorige geworfen, und sie fiel auf 118 Toisen und 3 Schuh und eine dritte endlich auf 121 Toisen. Man verlangte endlich noch weit größere Schußweiten, und sie giengen alle so lange gut, so lange man sich keiner Erde bediente. — Einige Tage darauf gebrauchte man Erde zu den Würfen, um Bomben auf 200, 250 und 300 Toisen zu werfen. Die Schußweiten trafen so ziemlich mit den Tabellen überein, aber doch nicht so genau, als vorher, da man ohne Erde warf. Man warf wieder andere auf 400, 500 und 600 Toisen, und die Schußweiten fielen ungefähr um 8 oder 10 Toisen kürzer aus, als es seyn sollte."

„Als ich zu Anfange des Maymonats im Jahre 1731 aus der königlichen Buchdruckerey ein Exemplar von meinen Tabellen erhielt, die so eben die Presse verließen, so ersuchten mich die Offiziers des unter dem Befehle des Herrn de la Perrelle stehenden Artilleriebataillons und noch andere Artillerieoffiziers neue Versuche anzustellen, welchen sie viele Tage hintereinander mit vieler Emsigkeit beywohnten. Wir warfen mit einander vorsetzlich aus

allerhand Mörsern Bomben auf 50, 112, 150, 200, 250 und 300 Toisen. Diese Würfe fielen insgesammt wohl aus, wie man dieses aus den Berichten sehen kann, die sie selbst aufgesetzt haben, und die am Ende dieses Vorberichts angeführt sind ꝛc."

Uebrigens bin ich versichert, daß Niemand meine Mühwaltung und meine gewöhnliche Originalität in dieser kleinen Schrift verkennen wird, da der ganze analytische Gang, nebst den vielen kurzen und sehr brauchbaren Formeln, durchgehends mein Werk ist, und da ich aus den hieher gehörigen Schriften, wovon mir die meisten kaum dem Namen nach bekannt sind, nicht das mindeste entlehnt habe.

Amberg, den 1. Oktober 1800.

Der Verfasser.

Lehnsätze aus der Kräftenlehre,

als

eine vorläufige Einleitung zur Ballistik.

I.

Kräfte lassen sich als Grössen durch Linien vorstellen, um so mehr, da jede Kraft nach einer gewissen Richtung wirkt, und Linien zur Bezeichnung der Richtungen unumgänglich nothwendig sind.

II.

Wenn mehrere Kräfte nach einerley Richtung zugleich wirken, so ist ihre Wirksamkeit im genauen Verhältniße mit ihrer Summe.

z. B. Je mehr Pferde vor einem Wagen gespannet sind, desto grösser darf die Last seyn, die sie fortschaffen.

III.

Wenn zwo gleiche Kräfte zu gleicher Zeit nach entgegengesetzter Richtung auf einander

wirken, so heben sie sich einander auf; denn $+k-k=0$.

z. B. Wenn zween gleich mächtige Stiere mit einander kämpfen, bringt keiner den andern, bey übrigens gleichen Umständen, von der Stelle.

IV.

Wenn ungleiche Kräfte zu gleicher Zeit in entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken, so ist die Wirksamkeit wie die Differenz derselben, und zwar nach der Richtung des stärkern. Denn wenn $+K-k=+w$ ist, so muß nothwendig $+k-K=-w$ seyn.

Wenn die Gewalt eines Stromes das Schiff mit einer Kraft wie 8 z. B. mit sich fortreißen will, die daran gespannten Pferde hingegen dasselbe mit einer Kraft wie 11 aufwärts ziehen, so wird das Schiff wie $11-8=3$ der Richtung der Pferde folgen. Denn die übrigen 8 der Pferde werden verwendet, um dem Strome das Gleichgewicht zu halten, damit er das Schiff nicht abwärts reiße. — Oder legt man in eine Waagschale 12 Loth, und in die andere 13, so wird die Waage gegen die 13 gerade so vorschlagen, als wenn in dieser Schale 1 Loth, und in der andern gar nichts wäre.

V.

Wenn zwo Kräfte zugleich unter einem Winkel auf einen Körper wirken, so gleicht der

dadurch beschriebene Raum der Diagonallinie eines Parallelograms, zu dessen Konstruirung die obigen 3 Stücke die zwo Seiten und den eingeschlossenen Winkel hergeben. Diese Diagonal läßt sich auch trigonometrisch bestimmen: sie ist $d = \sqrt{V^2 + v^2 - 2\,v\,V\ \cos.\ c}$, wo V und v die Kräfte (Vires) und c die Ergänzung (Complementum) des Winkels zu 180° vorstellen.

Zween Billardspieler stossen zugleich auf einen Ball, der sich in einem der 4 Ecke befindet. Der eine will ihn über die Breite des Billards, der andere über die Länge desselben fortjagen. Der Ball wird demnach den Mittelweg ergreifen, und die Diagonal des Billards machen.

VI.

Wirken beyde Kräfte gleichförmig, das heißt, werden zu gleichen Zeiten gleiche Räume hinterlegt, so ist die Diagonal eine gerade Linie. Wirkt aber eine von den beyden Kräften gleichförmig beschleunigt, dann wird die Diagonal krummlinicht ausfallen.

Wenn ein Stein fortgeschleudert wird, so wirken augenblicklich 2 verschiedene Kräfte darauf, nämlich die gleichförmige Wurfkraft, und die gleichförmig beschleunigte Zugkraft des Mittelpunkts der Erde. — Die Bahn dieses Körpers ist demnach, der Erfahrung zufolge, eine krumme Linie.

VII.

Diese Diagonal wird zur nämlichen Zeit hinterlegt, während jede der Seitenlinien einzeln durchloffen worden wäre.

Hat einmal so ein fortgeschleuderter Stein die größte Höhe erreicht, so würde er in der nämlichen Zeit senkrecht zur Erde niederfallen, während er den Umweg des Bogens beschreibt.

VIII.

Die Geschwindigkeit C zu bestimmen, welche ein Körper im freyen Fall am Ende des Raumes S erlangt, dient die Formel $C = 2\sqrt{gS}$, wo g den Raum eines freyfallenden Körpers in der ersten Sekunde bedeutet, welcher in unsern Gegenden ungefähr 16 baiersche Schuhe beträgt. Läßt man diesen Raum = 1 gelten, so ist $C = 2\sqrt{S}$, und die darnach berechneten Resultate sind in dieser Einheit ausgedrückt. Uebrigens sind die Räume von Sekunde zu Sekunde wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5 ꝛc.

Wenn z. E. ein Körper 100 Schuhe hoch herab fällt, so ist seine Endesgeschwindigkeit $C = 2\sqrt{16 \times 100} = 2\sqrt{1600} = 2 \times 40 = 80$. Der Körper hat also zu Ende des Falls eine solche Geschwindigkeit erlanget, als wenn er von Sekunde zu Sekunde gleichförmig 80 Schuhe zurückgelegt hätte.

IX.

Die Zeit T, welche der freye Körper im freyen Fall durch den Raum zubringt, hat den Ausdruck zur Formel: $T = \sqrt{\frac{S}{g}}$, oder unter obiger Bedingung, wenn $g = 1$; $T = \sqrt{S}$.

Es braucht demnach ein Körper zu 100 Schuhen im freyen Fall $T = \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ Sekunden.

X.

Ist die Bewegung gleichförmig, so wird der Raum gefunden, wenn die Geschwindigkeit, d. i. der Raum in einer Zeiteinheit, mit der Zeit, oder mit der Anzahl dieser Zeiteinheiten multiplicirt wird $S = CT$.

Ein Both macht täglich 7 Meilen; folglich wird er in 5 Tagen einen Raum von $7 \times 5 = 35$ Meilen hinterlegen.

XI.

Drückt C die endliche Geschwindigkeit in einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, z. B. im freyen Falle aus, so ist der Raum $S = \frac{CT}{2}$, d. i. die Hälfte des Raumes, welchen man erhalten hätte, wenn die Endesgeschwindigkeit durch die ganze Zeit der Bewegung herrschend gewesen wäre.

Ist z. B. die endliche Geschwindigkeit = 80, und die Zeit $2\frac{1}{2}$ Sekunde, so wird der Raum

$$S = \frac{80 \times 2\frac{1}{2}}{2} = 40 \times 2\frac{1}{2} = 100 \text{ seyn.}$$

XII.

Die Grösse der Bewegung, oder die ausübende Gewalt eines Körpers am Ende seiner Bewegung ist wie das Produkt aus seinem Gewicht in die Endesgeschwindigkeit, folglich von zweyen Körpern $Q : q = PC : pc$, wo Q und q die Größe der Bewegung (quantitas motus), P und p die Gewichte (pondera), dann C und c die Endesgeschwindigkeiten (celeritates finales) bedeuten.

Es falle z. B. ein steinernes Kügelchen aus einer Höhe von 12 Schuhen in weichen Ton herab, und schlage ein Loch von 8 Linien hinein, so wird eine gleichgroße bleyerne Kugel, welche 5mal schwerer ist, aus einer Höhe von 6 Schuhen ungefähr 28 Linien tief hineinschlagen, gemäß der Substitution u. Rechnung:

$$8 : x = 1 . 2\sqrt{16 . 12} : 5 . 2\sqrt{16 . 6}$$

$$\text{Quad. } 64 : x^2 = 4 . 16 . 12 : 25 . 4 . 16 . 6$$

$$= 12 : 25 . 6$$

$$= 2 : 25$$

$$32 : x^2 = 1 : 25$$

$$x^2 = 800$$

$$\sqrt{} \quad x = 28$$

Lehn-

Lehnsätze

aus der ebnen Trigonometrie und höhern Geometrie.

I.

Zween Nebenwinkel haben einerley Sinus, das ist: $\sin.\ \varphi = \sin.\ (180 - \varphi)$

II.

Der Sinus von 30° ist dem halben, so wie die Tangente von 45° dem ganzen Radius gleich. Ferner ist auch der Sinus von 90° dem ganzen Radius gleich, und die Tangente von 90° unendlich groß.

III.

Wenn der Radius = 1 angenommen wird, so ist ferner

1) $\text{tang.}\ \varphi = \dfrac{\sin.\ \varphi.}{\cos.\ \varphi}$

2) $\sin.\ 2\varphi = 2\sin.\ \varphi\ .\ \cos.\ \varphi = \dfrac{2\sin.^2\ \varphi.}{\text{tang.}\ \varphi}$

3) $\sin.^2\ 45° = \frac{1}{2}.$

IV.

In der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten, wie die Abscissen, d. i.

$$y^2 : Y^2 = x : X.$$

V.

Die Ordinate des Brennpunkts ist der halbe Parameter, und die dazu gehörige Abscisse, oder die Brennweite, ist der vierte Theil des Parameters.

$$y = \frac{1}{2} p.$$
$$x = \frac{1}{4} p.$$

VI.

Der Brennstrahl ist der Summe der entsprechenden Abscisse und Brennweite gleich.

$$B = x + \frac{1}{4} p.$$

VII.

Die Tangente hat den Ausdruck:

$$T = \sqrt{4x^2 + px}$$

zur Formel, und die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich.

Ballistik.

§. 1.

Erklärung. Man versteht unter Ballistik die Lehre von der Bewegung geworfener Körper. Das Wort selbst leitet die Etimologie von dem griechischen Zeitworte βαλλω (ich werfe) unverkennbar ab.

§. 2.

Lehrsatz. Die Linie, welche von dem Wurfe einer Bombe, oder eines andern nicht senkrecht fortgeworfenen Körpers beschrieben wird, ist eine

Parabel, in so ferne die Einwirkung der Luft nicht in Erwägung gezogen wird.*)

Der Beweis für diesen Satz muß durch zween Fälle geführt werden. Der erste Fall ist, wenn die Richtung eines Wurfes oder Schußes horizontal oder wasserrecht; der zweyte, wenn sie schief angenommen wird: und der Satz heißt allemal

(Fig. I.)

$$y^2 : Y^2 = x : X.$$

Beweis. Auf die losgeschossene Kugel wirken unter einem rechten Winkel zwo Kräfte, nämlich die gleichförmige Kraft des Pulvers, und die

---

*) Anmerkung. Wie weit die Einwirkung der Luft den geworfenen Körper von der Parabelbahn abweichen macht, bleibet für den Theoretiker zum Theile noch immer ein Problem; und die Auflösung desselben scheint mit allzuvielen Schwierigkeiten verbunden zu seyn, als daß man mit Grunde Hoffnung haben könnte, sie werde über kurz oder lang den Gelehrten völlig glücken. Indeß läßt sich beym Bombenwerfen alles so ziemlich zuverlässig aus der Parabellehre bestimmen; und nur bey Kanonen, weil selbe ihre Kugeln unerhört schnell forttreiben, wäre man der Auflösung dieses sogenannten ballistischen Problems benöthiget.

gleichförmig beschleunigende Kraft der Schwere. — Man drücke diese Kräfte durch Linien aus, und schneide von beyden etliche gleiche Theile ab, doch so, daß die Theile der Triebkraft namhaft größer, als jene der Schwerkraft werden.

Nun würde die Kugel in der ersten Kleinzeit — z. B. in der ersten Sekunde — wenn die Kraft des Pulvers allein wirkte, in c, und wäre sie der Schwerkraft allein überlassen, in b seyn. Weil aber beyde Kräfte zugleich auf sie wirken, so muß die Kugel den Mittelweg der Diagonal einschlagen, und also zu Ende der ersten Kleinzeit sich in d befinden.

Da die Räume der frey fallenden Körper wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, u. s. f. sind, so würde die Schwerkraft den Körper in der zweyten gleichen Kleinzeit bis h gezogen haben, während die Schußkraft ihn nach f getrieben hätte. Er mußte also aus obigen Gründen nach g kommen. Nach der dritten Kleinzeit ist der Körper in l u. s. w.

Es liegen also d, g und l in der Bahnlinie der Kugel. Nun ist

$$ac : af = 1 : 2$$

aber $bd = ac$, und $hg = af$,

Subst. $bd : hg = 1 : 2$

Quad. $bd^2 : hg^2 = 1 : 4$

allein auch $ab : ah = 1 : 4$

$$bd^2 : hg^2 = ab : ah$$

das ist $y^2 : Y^2 = x : X.$

Nimmt man eine andere Ordinate, z. B. kl, so gilt das Nämliche; denn

$$hg : kl = 2 : 3$$

Quad. $hg^2 : kl^2 = 4 : 9$

aber auch $ah : ak = 4 : 9$

$$hg^2 : kl^2 = ah : ak$$

das ist $y^2 : Y^2 = x : X.$

Da nun diese Eigenschaft ausschließungsweise der Parabel zukömmt, so ist erwiesen, daß der Horizontalschuß eine Parabel beschreibe. — Nun auch zum schiefen Wurf!

Man löse Fig. 2. die schiefwirkende Kraft au in zwo andere auf, nämlich in die senkrechte pa und in die Horizontalkraft aq, so, daß au die Diagonal des Parallelograms werde. Um die Eigen-

schaft der krummen Linie genauer kennen zu lernen, theile man die Zeit des Aufsteigens in 2 gleiche Theile, und, weil der Körper eben so lang zum Niederfallen braucht, die Zeit des Niederfallens gleichermassen in solche zween Theile. In 4 Zeittheilchen ist aber die Einwirkung der Schwerkraft, wie ihr Quadrat, das ist, wie 16. Man theile demnach die Senklinie a p in 16 gleiche Theile.

In dem ersten vierten Theil der Zeit käme der Körper bis zum vierten Theil der Horizontallinie, nämlich bis b, oder, wenn er aufwärts gleichförmig getrieben würde, bis h, welches ebenfalls der vierte Theil der ganzen Linie a p ist. Allein hier drückt ihn die Schwerkraft um eine von den 16 Einheiten abwärts, und läßt ihn also nur bis z kommen. Schließt man das Parallelogram, so muß nothwendig der Körper in r seyn.

Nach 2 Zeittheilen käme einerseits der Körper bis zur Hälfte der Horizontallinie in m, andrerseits bis zur Hälfte in k; aber die Schwerkraft drückt ihn neben der ersten Einheit noch um 3 andere herab, also zusammengenommen um 4 solche Einheiten. Folglich wäre dießmal der Körper in h.

Macht man das Parallelogram, so weiset die Diagonallinie nach f, zu Ende des dritten Zeittheils nach x, und endlich gar nach q.

Es ist aber auch hier

$$bm : am = 1 : 2$$

$$\text{aber } bm = rg$$

Substit.	$rg : am = 1 : 2$
Quad.	$rg^2 : am^2 = 1 : 4$
Ferner	$hz : ha = 1 : 4$
	$rg^2 : am^2 = hz : ha$
Aber	$hz = fg$ u. $ha = fm$
also	$rg^2 : am^2 = fg : fm$
d. i.	$y^2 : Y^2 = x : X.$

§. 3.

Zusatz. Die halbe Diagonallinie ist demnach allemal die Tangente der Parabel; weil die Schwerkraft schon im ersten Augenblick die Kugel von der Ziellinie, d. i. von der Diagonal wegdrückt: und würde man in verkehrter Richtung abwärts schießen, so hätte ein Gleiches statt. Folglich ist nur ein einziger Punkt der Ziellinie mit der Parabel gemeinschaftlich; also ist sie eine wahre Tangente.

§. 4.

Erklärung. Der Winkel, welchen die Ziellinie oder vielmehr die Seele des Geschützes mit dem Horizonte macht, wird Richtwinkel, oder Erhöhungswinkel (angulus elevationis) genennt.

§. 5.

Zusatz. Weil t m als Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist, so kann man allemal, wenn die Diagonallinie und der Richtwinkel gegeben wird, die Höhe der Parabel durch Zeichnung bestimmen. Denn man darf nur die Diagonallinie halbieren, und vom Halbierungspunkt einen Perpendikel auf die Horizontallinie herabfallen lassen, so ist die Hälfte dieser Senklinie oder Subtangente die Höhe der Parabel, und die Entfernung derselben vom Mörser die halbe Schußweite. Man erhält auch die ganze Schußweite durch Konstruktion des Rechteckes, welches der Diagonallinie und dem Richtwinkel zugehört.

§. 6.

Zusatz. Giebt man die Doppelordinate, das heißt die Schußweite, und den Richtwinkel, so ist die Zeichnung der Höhe wieder leicht; denn man

errichte auf der Mitte der Schußweite eine Lothe, so wird dieß die Subtangente, folglich ihre Hälfte die Parabelhöhe, und die abgeschnittene Ziellinie die Tangente der Parabel seyn.

§. 7.

Zusatz. Etwas schwerer scheint die Sache, wenn die Schußweite und die Diagonal ohne Richtwinkel gegeben sind. Man verfährt aber hierinfalls so: Es wird der Zirkel in dem einen Endpunkt der Schußweite eingesetzt, und mit der Oeffnung der Diagonal ein Zirkelbogen beschrieben, welchen eine auf dem andern Endpunkt aufgerichtete Lothe erreichen kann. Das Uebrige ist wie oben.

§. 8.

Erklärung. Wenn man eine senkrechte Linie ausfindig macht, bey derer Durchfallung der Körper am Ende solch eine Geschwindigkeit erlangt, daß er mit derselben gleichförmig die Weite des Kernschußes durchläuft, während ein anderer von der Höhe der Parabel herabfällt, so heißt dieß die Falllinie des Kernschußes. Beym schiefen Wurfe muß die Falllinie so groß seyn, daß der Körper mit der erlangten Geschwindigkeit die halbe

Diagonal d. i. die Tangente gleichförmig zu durchlaufen im Stande ist, während ein andrer Körper die Höhe der Parabel durchfällt.

§. 9.

Lehrsatz. Beym Kernschuß ist diese Falllinie der Brennweite gleich.

Voraussetzung.

Wenn $C = 2\sqrt{\frac{1}{4}p} = \sqrt{p}$

und $T = \sqrt{x}$,

Satz.

so ist gleichförmig $S = y$

Beweis.

In der gleichförmigen Bewegung ist

$$S = CT$$

subſtit. $S = \sqrt{p}\sqrt{x}$

Quad. $S^2 = px$

aber auch $y^2 = px$

$S^2 = y^2$

$\sqrt{}$ $S = y.$

§. 10.

Lehrsatz. Beym schiefen Wurf ist die Falllinie dem Brennstrahl gleich.

Voraussetzung.

Wenn $C = 2\sqrt{x + \frac{1}{4}p}$

und $T = \sqrt{x}$,

Satz.

so ist gleichförmig S = Tang.

Beweis.

$$S = CT$$

subſtit. $S = 2\sqrt{x + \frac{1}{4}p} \times \sqrt{x}$

Quad. $S^2 = 4(x + \frac{1}{4}p)x = 4x^2 + px$

$\sqrt{}$ $S = \sqrt{4x^2 + px}$

ab. auch $\text{Tang.} = \sqrt{4x^2 + px}$

$S = \text{Tang.}$

§. 11.

Zusatz. Man kann diese Falllinie sowohl beym Kernschuße als beym Winkelwurfe auch durch Zeichnung sichtbar machen.

Beym Kernschuß bilde man aus der Abscisse und Ordinate das Rechteck, theile jene Seite, die der Schußweite gleich ist, in zween gleiche Theile, ziehe ferner vom Ende der Abscisse auf den Theilungspunkt eine Hypothenuse hin, und errichte hier auf diese Hypothenuse einen Perpendikel so lange,

bis die rückwärts verlängerte Abscisse selbem begegnet, so ist diese Verlängerung die Falllinie, oder was eines heißt, die Brennweite. Fig. 3.

Satz.

$$af = \frac{1}{4} p.$$

Beweis.

Um jeden rechten Winkel kann ein halber Zirkel geschlagen werden; folglich wird a b ein Perpendikel von der Peripherie auf den Durchmesser des Zirkels, a f und a d aber Abschnitte desselben seyn.

Daher $ab = af \times ad$

subftit. $\frac{y^2}{4} = af \times x$

aber $y^2 = px$

subftit. $\frac{px}{4} = af \times x$

$: x \quad \frac{p}{4} = af.$

Beym schiefen Wurf wird die Falllinie so gezeichnet: Man errichte sowohl auf der halben Tangente als auf dem Anfangspunkt der Wurfweite Senklinien, und verlängere beyde so lange fort, bis sie einander erreichen, so ist die letztere die verlangte Falllinie, d. i. der Brennstrahl.

Satz. Fig. 4.

$$fc = x + \tfrac{1}{4}p.$$

Beweis.

$$\triangle\, adc \sim fac$$

also $dc : ac = ac : fc$

aber $dc = kg = x.$

und $ac = \tfrac{1}{2}\,\text{Tang.} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + px}$

substit. $x : \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + px} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + px} : fc$

$fc \times x = \tfrac{1}{4}(4x^2 + px) = x^2 + \tfrac{1}{4}px$

$: x \quad fc = x + \tfrac{1}{4}p.$

§. 12.

Zusatz. So lang also die nämliche Ladung, folglich auch die nämliche Triebkraft des Pulvers, bleibt, so lang herrscht auch für allerley Richtwinkel die nämliche Falllinie.

§. 13.

Zusatz. Wenn demnach die Wurfweite und der Richtwinkel eines Probeschußes gegeben sind, so kann die Weite sowohl als die Höhe des Wurfes für jeden andern Richtwinkel durch Zeichnung bestimmt werden. Denn man trage die Wurfweite des Probeschußes im verjüngten Maaße, nebst

dessen Richtwinkel, auf eine Horizontallinie hin. Errichte auf der Hälfte dieser Weite die Subtangente. Theile auch die Tangente in zween gleiche Theile, und bestimme die Falllinie. Man werfe über diese Falllinie einen halben Zirkel, und ziehe eine Ziellinie unter oder ober dem gegebenen Richtwinkel, so muß allemal jenes Stück der Ziellinie, welches sich innerhalb des Zirkels befindet, nämlich die Sehne, die halbe Tangente der neuen Parabel seyn; weil, wenn man ihr vom andern Ende des Durchmessers eine Sehne entgegenzieht, dieselbe senkrecht auf dieser Tangente steht, folglich für den gegebenen Richtwinkel und für die beständige Falllinie keine andere Lothe als gerade die nämliche möglich ist. Hat man einmal die halbe Tangente, so ist nichts leichter, als auch die Subtangente, als die doppelte Höhe der Kugelbahn, und die Doppelordinate, als die verlangte Wurfweite, herzustellen.

§. 14.

Lehrsatz. Der Perpendikel, welcher von der halben Tangente auf die Falllinie herein gefällt wird, gleicht allemal der halben Ordinate d. i. dem vierten Theil der Wurfweite.

Satz. Fig. 5.

$$fg = \tfrac{1}{2} y.$$

Beweis.

$$\triangle\, bfg \backsim bts, \text{ weil } o = x$$

folglich $bg : bt = fg : bs$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Tang.} : \text{Tang} = fg : y$$

: Tang. $\tfrac{1}{2} : 1 = fg : y$

$$fg = \tfrac{1}{2} y.$$

§. 15.

Zusatz. Das Stück der Falllinie unter diesem Perpendikel ist allemal der Höhe der Parabel, und das Stück oberhalb, der Brennweite gleich, welches sich zum Ueberfluß auch kurz so erweisen läßt.

Sätze.

1) $bf = x.$

2) $af = \tfrac{1}{4} p.$

Beweis.

I.

$$bg : bt = bf : ts$$

d. i. $\tfrac{1}{2} : 1 = bf : 2x$

$$bf = x,$$

das erste, was zu erweisen war.

2.

$$\begin{array}{rl} af + bf = & x + \frac{1}{4}p \quad \text{§. 11.} \\ - bf = & - x \\ \hline af = & \frac{1}{4} p. \end{array}$$

§. 16.

Lehrsatz. Unter dem Richtwinkel von 45° ist die Falllinie der halben Schußweite gleich, und die Höhe der Parabel ist so groß, als der vierte Theil der Schußweite oder die halbe Ordinate. Mit andern Worten heißt dieß soviel, daß hier die Ordinate zum Brennstrahl, und die Abscisse zur Brennweite wird.

Sätze.

1) $y = x + \frac{1}{4}p.$

2) $x = \frac{1}{4}p.$

Beweis. Fig. 5.

1) Weil $r = 45°$, muß auch $n = 45°$ seyn.

Daher $dc = bc$

aber $ad = bc$

also $dc = ad$

das ist $y = x + \frac{1}{4}p.$

2) $hc = \frac{1}{2}bc$

$\times 2$ $2hc = bc$

aber	bc	$=$	dc
also	$2\,hc$	$=$	dc
d. i.	$2x$	$=$	y
darum	y	$=$	$x + \frac{1}{4}p$

$$2x = x + \tfrac{1}{4}p$$
$$-x \quad -x$$
$$x = \tfrac{1}{4}p.$$

§. 17.

Zusatz. Die Wurfweite unter dem Richtwinkel von 45° ist am größten; denn der Perpendikel fg, als vierter Theil derselben, ist dem Radius selbst gleich, und muß bey größern Winkeln eben darum wieder abnehmen.

Satz. Fig. 5.

$$fg = R.$$

Beweis.

$fd = hc = x$ als halbe Subtangente.

$$af = bh = x$$

also $af = fd = R$

$$gf^2 = af \times fd$$

subſtit. $gf^2 = R^2$

$\surd$ $gf = R.$

§. 18.

Zusatz. In Mitte der größten Wurfweite liegt also der Brennpunkt; weil nach §. 16. hier $x = \frac{1}{4} p$ ist; oder weil der Brennstrahl zur Ordinate wird.

§. 19.

Erklärung. Da der Wurf unter dem Richtwinkel von 45° der größte unter allen ist; so wird er gemeiniglich zum Probeschuß gebraucht, woraus sich alle anderen Würfe nach ihrem Richtwinkel berechnen lassen, vorausgesetzt, daß die Ladung, die Schwere der Bombe, und alle übrigen Umstände, die nämlichen bleiben.

§. 20.

Lehrsatz. Wenn man die Weite des Probeschußes unter dem Richtwinkel von 45° mit dem Sinus eines doppelten andern Richtwinkels multiplicirt, so erhält man die Weite des ihm zugehörigen Wurfes. Es heiße die gesuchte Wurfweite $= w$, die des Probschußes $= P$, und der Richtwinkel $= r$, so ist der

Satz.

$$w = P \,.\, \sin.\, 2r.$$

Beweis. Fig. 6.

$$n = r = \frac{ad}{2}$$

$$ad : af = \sin. r : 1$$

d. i. $\frac{Tang.}{2} : \frac{P}{2} = \sin. r : 1$

$\times 2$ $Tang. : P = \sin. r : 1$

$$Tang. = P \,.\, \sin. r$$

ferner ist $ac : ab = 1 : \sin. m.$

d. i. $Tang. : \frac{w}{2} = 1 : \cos. r$

$$Tang. = \frac{w}{2 \cos. r}$$

daher $\frac{w}{2 \cos. r} = P \,.\, \sin. r$

$\times 2 \cos. r$ $w = P \,.\, 2 \sin. r \,.\, \cos. r$

aber $2 \sin. r \,.\, \cos. r. = \sin. 2r$, Trigon.

substit. $w = P \,.\, \sin. 2r.$

§. 21.

Anwendung. Die Weite des Probewurfs hält 6968 Schuh; wie groß wird die Weite eines Wurfes bey dem Richtwinkel 28° 30′ ausfallen?

Auflösung.

$$w = 6968 \times \sin. 2 (28^\circ . 30') = 6968 \times \sin. 57^\circ$$

Log. 6967	=	3.8431081
Log. sin. 57°	=	9.9235914
		13.7666995 = Log. 5843

Die Wurfweite ist demnach 5843 Schuh.

§. 22.

Zur Uebung. Wenn der Wurf bey dem Richtwinkel von 45° genau 8442 Schuh reicht; wie weit wird man unter dem Richtwinkel von 19° werfen?

§. 23.

Lehrsatz. Bey dem Richtwinkel von 15°, welcher ebenfalls zu Probeschüßen gebraucht wird, ist die Wurfweite w nur halb so groß als unter 45°. Man nenne die Weite dieses kleinern Probeschußes = p, so heißt der

Satz.

$$p = \frac{1}{2} \mathfrak{P}.$$

Beweis.

$$w = \mathfrak{P} . \sin. 2 r$$

aber hier ist $r = 15$ und $w = p$

also $p = \mathfrak{P} . \sin. 30$

da nun $\sin. 30 = \frac{1}{2}$

$$p = \mathfrak{P} . \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \mathfrak{P}$$

oder $2 p = \mathfrak{P}.$

§. 24.

Zusatz. Will man demnach obige Formel für den kleinern Probeschuß anwendbar machen,

so muß selbe eben darum diese Gestalt annehmen
$w = 2\,p\,\sin.\,2\,r$.

§. 25.

Zusatz. Möchte man gerne aus dem Probeschuß auf den Richtwinkel schließen, um mit der nämlichen Ladung eine gewisse Weite zu erreichen, dann müssen beyde Formeln durch Division in diese umgewendet werden

$$\sin.\,2\,r = \frac{w}{P}$$

oder $$\sin.\,2\,r = \frac{w}{2\,p}$$

Die Regel heißt demnach, mit Worten vorgetragen, so: Man erhält den Sinus des doppelten Richtwinkels für jede verlangte Wurfweite, wenn man diese durch die Wurfweite des größern Probeschußes, oder durch 2 Wurfweiten des kleinern, dividirt.

§. 26.

Anwendung. Wie weit muß der Mörser erhöht werden, um auf 2476 Schuh werfen zu können, wenn der kleine Probeschuß 1844 Schuh hält?

Auflösung.

```
 1844
    2
 ----
 3688

 24760 | 0,6713. .
  3688
 22128
 -----
  26320
   3688
  25816
  -----
    5040
    3688
    ----
   13520
    3688
```

Schlägt man diese Decimalzahl 0,6713.. bey den Sinussen nach, so ergiebt sich ein Doppelwinkel von 42°, 10′; folglich der einfache Richtwinkel 21°, 5′.

Oder logarithmisch:

Log. 2474 = 3.3937506
Log. 3688 = 3.5667909
9.8269597 = 42° 10′

also 2 r = 42° 10′
: 2 r = 21° 5′

§. 27.

Zur Uebung. Der große Probewurf reicht auf 5770 Schuh, wie viel muß der

Mörser erhoben werden, um die Bombe nach einem Ziele, das nur 1800 Schuh entfernt, zu spielen?

§. 28.

Lehrsatz. Im Nothfalle können auch andere Würfe zu Proben dienen. Es ist dann der Satz anwendbar: Zwey Wurfweiten der nämlichen Ladung und übrigens gleicher Umstände verhalten sich wie die Sinusse der doppelten Richtwinkel.

Satz.

$$w : W = \sin. 2r : \sin. 2R. \text{*)}$$

Beweis.

$$w = \mathfrak{P} \sin. 2r$$
$$W = \mathfrak{P} \sin. 2R$$
$$w : W = \mathfrak{P} \sin. 2r : \mathfrak{P} \sin. 2R$$
$$w : W = \sin. 2r : \sin. 2R \quad : \mathfrak{P}$$

*) Der gewöhnliche Beweis dieses Lehrsatzes, welcher sich beynahe in allen ballistischen Schriften finden läßt, ist in Kürze gefaßt dieser: Es seyen Fig. 7. z und (z + x) die Richtwinkel, folglich gemäß der Zeichnung qk und qh die dazu gehörigen Wurfweiten. Also Satz:

$$qk : qh = \sin. 2z : \sin. 2(z+x).$$

§. 29.

Anwendung. Man warf eine Bombe bey dem Richtwinkel 12° auf eine Weite von 1261 Schuh; wie groß muß der Richtwinkel seyn, um noch so weit zu werfen?

Auflösung.

$1261 : 2522 = \sin. 24 : \sin. 2x$

Log. $2522 = 3.4017451$
Log. sin. $24 = 9.6093133$

13.0110584
3.1007151

Log. $1261 = 9.9193433 =$ Log. sin. $54^\circ\ 34'$

folglich $2x = 54^\circ\ 34'$

$:2 \quad x = 27^\circ\ 17'$

Beweis. $z = \frac{aq}{2}$ als Periph. Winkel.

$\times 2 \quad 2z = aq$
auch $\quad m = aq$

$m = 2z.$

Ferner $x + z = \frac{paq}{2}$

$\times 2 \quad 2(x + z) = paq$
auch $\quad m + n = paq$

$m + n = 2(x + z).$

Nun ist $ac = \sin. m$
und $lp = \sin. (m + n).$ In Prop. gest.

$ac : lp = \sin. m : \sin. (m + n)$

$\times 4 \quad 4ac : 4lp = \sin. m : \sin. (m + n)$

subst. $qk : qh = \sin. 2z : \sin. 2(x + z).$

§. 30.

Zur Uebung. Wenn bey dem Richtwinkel 32° die Bombe 1170 Schuh weit fliegt, wie groß muß der Richtwinkel seyn, um 320 Schuh zu erreichen?

§. 31.

Lehrsatz. Zwey Wurfweiten, die zu solchen Richtwinkeln gehören, deren einer eben so viel über 45° als der andere darunter hält, sind gleich.

Voraussetzung.

Wenn $r = 45 - m$
und $R = 45 + m$

Satz.

$$w = W$$

Beweis.

$w : W = \sin.2(45 - m) : \sin.2(45 + m)$
d. i. $w : W = \sin.(90 - 2m) : \sin.(90 + 2m)$
aber $(90 - 2m) + (90 + 2m) = 180$,
also sind es Nebenwinkel, und haben gleiche Sinusse. Daher

$w : W = \sin. x : \sin. x$
und $w = W$.

§. 32.

Zusatz. Man kann demnach jede Wurfweite mit zween Richtwinkeln erreichen, welche gleichweit von 45° abstehen. Man findet aber den zweyten Richtwinkel, wenn man den schon vorhandenen von 90° abzieht. Denn gehen diesem Richtwinkel r noch x Grade auf 45° ab, so muß der andere Richtwinkel R um x Grade mehr haben.

Das heißt $r + x = 45°$
$R - x = 45°$

addirt $r + R = 90°$
und $R = 90° - r.$

§. 33.

Anwendung. Der größere Probeschuß hält 2560 Schuh; unter welchen zween Richtwinkeln können mit der nämlichen Ladung 978 Schuh erreicht werden?

Auflösung.

Log. 978 = 2.9943171
Log. 2560 = 3.4082400

9.5860771 = Log. sin. 22° 40′

folglich $r = 11° 20'$
und $R = 90° - 11° 20' = 78° 40'$.

§. 34.

Zur Uebung. Suche man für die berechneten Richtwinkel §. 26. u. 29. auch ihre zweyten Richtwinkel.

§. 35.

Lehrsatz. Auch die Höhe der Parabel läßt sich für jeden Richtwinkel bestimmen. Man darf nur die ganze Weite des kleinern Probeschußes, oder die halbe des größern durch das Quadrat des Sinus vom Richtwinkel multipliciren.

Satz. Fig. 8.

$a = p \,.\, \sin.^2 r$, oder $= \frac{1}{2} P \,.\, \sin.^2 r$.

Beweis.

I.

$af : df = 1 : \sin. r$

da aber $ac = \text{Tang.}$

$df = \text{Subtang.} = 2x$, oder hier $2a$

so ist $\text{Tang.} : 2a = 1 : \sin. r$

$\text{Tang.} \,.\, \sin. r = 2a$

$: \sin. r. \quad \text{Tang.} = \frac{2a}{\sin. r}$

II.

$ab : ac = \sin. m : 1.$

aber $ac = \frac{1}{2} P = p$, u. $m = r$

daher $\frac{Tang.}{2} : p = sin.\, r : 1$

$$\frac{Tang.}{2} = p\,.\, sin.\, r$$

$\times 2$ $\quad Tang. = 2\, p\,.\, sin.\, r.$

III.

$$\frac{2\,a}{sin.\, r.} = 2\, p\,.\, sin.\, r$$

$:2 \times sin.\, r \quad a = p\,.\, sin.^2\, r$, oder $= \frac{1}{2} P.\, sin.^2\, r.$

§. 36.

Anwendung. Der kleinere Probewurf betrug 844 Schuh; nun soll unter dem Richtwinkel von 10° geworfen werden; wie hoch wird die Bombe steigen?

Auflösung.

Log. 844 = 2.9263424
Log. sin. 10 = 9.2396702
9.2396702

1.4056828 = 25, 45.

Also nicht gar 26 Schuh.

§. 37.

Fortsetzung. Da man unter dem Richtwinkel 80° die nämliche Wurfweite

erreicht, so fragt sich, um wie viel höher dießmal die Bombe steigt?

Auflösung.

Log. 844	=	2.9263424	
Log. 80	=	9.9933515	
		9.9933515	
		2.9130454	= Log. 818,6
		818,6	
		53	

Die Bombe steigt also um 765,6 Schuh höher.

§. 38.

Lehrsatz. Selbst aus dem Richtwinkel und aus der gemessenen Weite eines Wurfes läßt sich die Höhe der Parabel auch ohne Probeschuß bestimmen. Sie ist allemal der vierte Theil des Produkts aus der Wurfweite und der Tangente des Richtwinkels.

Satz. Fig. 8.

$$a = \frac{w \cdot \text{tang.}\, r}{4}$$

Beweis.

$$ad : df = \text{sin.}\, n : \text{sin.}\, r$$

substit. $\frac{w}{2} : 2a = \text{cos.}\, r : \text{sin.}\, r$

$$2a \times \text{cos.}\, r = \frac{w \cdot \text{sin.}\, r}{2}$$

$$:2\,\mathrm{cos.}\,r. \quad a = \frac{w\,.\,\mathrm{sin.}\,r.}{4\,\mathrm{cos.}\,r} = \frac{w}{4} \times \frac{\mathrm{sin.}\,r}{\mathrm{cos.}\,r}$$

$$\text{aber} \quad \frac{\mathrm{sin.}\,r}{\mathrm{cos.}\,r} = \mathrm{tang.}\,r$$

$$\text{substit.} \quad a = \frac{w\,.\,\mathrm{tang.}\,r}{4}$$

§. 39.

Zusatz. Der nämliche Ausdruck kann auch erobert werden, wenn man in den beyden Formeln $w = 2\,p\,.\,\mathrm{sin.}\,2r$, und $a = \frac{p\,.\,\mathrm{sin.}\,2r\,.\,\mathrm{tang.}\,r}{2}$ Werthe für p bestimmt, und sie in eine neue Gleichung zusammensetzt. Z. B.

I.

$$w = 2\,p\,.\,\mathrm{sin.}\,2\,r$$

$$:2\,\mathrm{sin.}\,2\,r \quad \frac{w}{2\,\mathrm{sin.}\,2\,r} = p.$$

II.

$$a = \frac{p\,.\,\mathrm{sin.}\,2\,r\,.\,\mathrm{tang.}\,r}{2}$$

$$2\,a = p\,.\,\mathrm{sin.}\,2\,r\,.\,\mathrm{tang.}\,r$$

$$\frac{2\,a}{\mathrm{sin.}\,2\,r\,.\,\mathrm{tang.}\,r} = p.$$

III.

$$\frac{2\,a}{\mathrm{sin.}\,2\,r\,.\,\mathrm{tang.}\,r} = \frac{w}{2\,\mathrm{sin.}\,2\,r}$$

$$\frac{2\,a}{\mathrm{tang.}\,r} = \frac{w}{2}$$

$\times$ tang. r $\quad 2a = \frac{w \cdot tang. r}{2}$

$:2 \quad a = \frac{w \cdot tang. r}{4}$

§. 40.

Anwendung. Die Tragweite einer Bombe unter dem Richtwinkel $35\frac{1}{2}$ Grad war 1279 Schuh; wie groß mag wohl die größte Höhe seyn, die sie erreichte?

Auflösung.

Log. 1279 = 3.1568705
Log. tang. 35° 39′ = 9.8532680
2.9601385 = Log. 912

folglich 912 : 4 = 228 Schuh.

§. 41.

Zur Uebung. Man wirft unter dem Winkel von 12° eine Bombe 817 Schuh weit; wie hoch fiel ihre Bahn aus?

§. 42.

Zusatz. Weil sich aus dem Ausdrucke:

$$a = \frac{w \cdot tang. r}{4}$$

auch zwo andere Formeln ableiten lassen, nämlich $w = \frac{4a}{tang. r}$, und $tang. r = \frac{4a}{w}$, so

kann bey jedem Wurf aus der Höhe und dem Richtwinkel dessen Weite, wie auch aus der Höhe und Weite, dessen Richtwinkel berechnet werden, ohne eben dazu einen Probeschuß nöthig zu haben.

§. 43.

Anwendung. 1. Wenn die größte Höhe eines Bombenflugs 770, und die Weite des Wurfes 1255 Schuh beträgt; wie groß mußte der Richtwinkel gewesen seyn?

Auflösung.

Hieher gehört die Formel $\text{tang. } r = \frac{4a}{w}$

$$\text{Log. } 4 \cdot 770 = \text{Log. } 3080 = 3.4885507$$
$$\text{Log. } 1255 = 3.0986437$$
$$10.3899070$$
$$10.3899070 = \text{Log. } 67^\circ\ 50'.$$

2. Eine Bombe erreicht unter einem Richtwinkel von 25° eine Höhe von 200 Schuh; wie groß ist die Tragweite?

Auflösung.

Formel: $w = \frac{4a}{\text{tang. } r}$

$$\text{Log. } 4 \times 200 = 2.9030900$$
$$\text{Log. tang. } 25^\circ = 9.6686725$$
$$3.2344175 = \text{Log. } 2110 \text{ Schuh.}$$

§. 44.

Zur Uebung. 1. Ein Bombardier behauptet, daß seine Würfe auf eine gewisse Festung bey dem Richtwinkel von 29° alle gegen 900 Schuh gestiegen wären. Wie weit müßte wohl die Festung von der Batterie entfernt gewesen seyn?

2. Rechne mir den Richtwinkel aus! sagte ein anderer Artillerist zu seinem Kammeraden: die Tragweite war 3074, und die größte Höhe 500 Schuh. Wie mußte dieser zu Werke gehen?

§. 45.

Zusatz. Wenn man in der obigen Formel $a = \frac{w \cdot \text{tang. } r}{4}$ den Richtwinkel $r = 45°$ setzt, so entsteht, weil tang $45 = 1$, $a = \frac{w}{4}$; das heißt, die Höhe des Wurfes beym Richtwinkel 45° ist dem vierten Theil der Wurfweite gleich. Setzt man $r = 90$, so wird, weil w in diesem Fall $= 0$, $a = \frac{0 \times \infty}{4} = \frac{0}{4} \times \infty = 0 \times \infty = 1$, welche Einheit nichts anders, als die ganze Falllinie bedeuten kann; da vorher nur immer ein Theil davon der Höhe der Parabel gleich war.

Unterm Richtwinkel 90° ist also die Höhe des Schußes der Falllinie selbst gleich. Bey den beyden abgeleiteten Formeln lassen sich ähnliche Betrachtungen anstellen.

§. 46.

Lehrsatz. Wenn die Tangente des Richtwinkels durch die Wurfweite multiplicirt, das Produkt durch die Zahl 16, 8 = g dividirt, und aus dem Quotus die Quadratwurzel ausgezogen wird, so erhält man in unsern Gegenden die Dauer des Wurfes in Sekunden ausgedrückt.

Satz.

$$d = \sqrt{\frac{w \,.\, \text{tang.}\, r}{g}}$$

Beweis.

Da ein Parabelast als Diagonal in der nämlichen Zeit durchloffen wird, während ein Körper durch die Höhe des Parallelograms, das ist, durch die Parabelhöhe hinabfällt, so ist der Ausdruck der Zeit

$$t = \sqrt{\frac{s}{g}}, \quad \text{oder hier } t = \sqrt{\frac{a}{g}},$$

$$\times 2 \qquad 2t = 2\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

aber d = 2 t, weil die Parabel zween Aeste hat,

folglich $d = 2 \sqrt{\frac{a}{g}}$

Da nun $a = \frac{w \cdot \text{tang.} r}{4}$

subſtit. $d = 2 \sqrt{\frac{w \cdot \text{tang.} r}{4 g}}$

$d = \sqrt{\frac{w \cdot \text{tang.} r}{g.}}$ *)

§. 47.

Anwendung. Eine Bombe wird unter dem Richtwinkel 32° 30′ geworfen, und hat zur Wurfweite 548 Schuh; wie viele Zeit brachte dieſe Bombe in der Luft zu?

Auflöſung.

$$d = \sqrt{\frac{548 \cdot \text{tang.}\, 32° \, 30'}{16,8}}$$

*) Da bekanntlich g den Raum eines freyfallenden Körpers in unſern Gegenden während der erſten Sekunde bezeichnet, und dieſer Raum 15, 526 rheiniſche Schuhe befunden worden, ſo wollte ich dieſe Zahl ebenfalls in baierſchen Schuhen ausdrücken. Es verhält ſich aber der rheiniſche zum baierſchen Schuh wie 13919 : 12650, und ſo erhielt ich aus obiger Zahl 16, 801 . . oder ſchlechtweg 16, 8. Der Logarithm davon iſt ein für allemal 1 . 2253737.

Log. 548 = 2.7387806

Log. tang. $32\frac{1}{2}°$ = 9.8041873

2.5429679

Log. 16, 8 1.2253737

1.3175042

: 2 0.6587071 = Log. 4, 5 ..

Also etwas über $4\frac{1}{2}$ Sekunden.

§. 48.

Zur Uebung. Von der Batterie bis in die Festung sind 4714 Schuh; wie lang brauchen die Bomben bey dem Richtwinkel 38° 30′ zum Hineinfliegen?

§. 49.

Zusatz. Verachtet man in g = 16, 8 das Decimalziffer 8, so ist

$$d = \sqrt{\frac{w \cdot \text{tang.} r.}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{w \cdot \text{tang.} r.}$$

§. 50.

Zusatz. Setzt man in dem letztern Ausdrucke r = 45, dann erhält man $d = \frac{1}{4}\sqrt{w}$.

§. 51.

Zusatz. Aus obiger Hauptformel

$$d = \sqrt{\frac{w \cdot \text{tang. } r}{g}}$$

fließen wieder folgende brauchbare Ausdrücke:

I.

$$d = \sqrt{\frac{w \cdot \text{tang. } r}{g}}$$

Quad. $$d^2 = \frac{w \cdot \text{tang. } r}{g}$$

$\times g$ $$d^2 g = w \cdot \text{tang. } r$$

$: w$ $$\frac{d^2 g}{w} = \text{tang. } r$$

II.

$$d^2 g = w \cdot \text{tang. } r$$

$: \text{tang. } r$ $$\frac{d^2 g}{\text{tang. } r} = w$$

III.

$$d^2 g = w \cdot \text{tang. } r$$

$: d^2$ $$g = \frac{w \cdot \text{tang. } r}{d^2}$$

§. 52.

Anwendung. 1. Ein Schleuderer zählte mit Fleiß einst die Sekunden, die sein fortgeworfener Stein brauchte, bis er zur Erde fiel. Er fand $7\frac{1}{2}$ Sekun-

den; wie weit reichte sein Wurf, vorausgesetzt, daß er auf einer Ebne geschah?

Auflösung.

Da zu vermuthen ist, daß geübte Schleuderer den Richtwinkel von 45° zu treffen gewohnt sind, so verwandelt sich die hieher gehörige Formel

$$w = \frac{d^2 g}{\text{tang}\, r.} \text{ in diese: } w = d^2 g.$$

Daher $w = (7,5)^2 \times 16,8 = 56,25 \times 16,8$
$= 945$ Schuh.

2. Wenn eine Bombe von der Batterie bis nach einem Thurme, der 4088 Schuh entfernt ist, 11 Sekunden brauchte, welcher Richtwinkel ist genommen worden?

Auflösung.

$$\text{tang.}\, r = \frac{d^2 g}{w}$$

$$\text{tang.}\, r = \frac{(11)^2 \times 16,8}{4088} = \frac{121 \times 16,8}{4088}$$

$$= \frac{2032,8}{4088} = 0,5 \text{ beynahe.}$$

Es entspricht aber der Tangente 0, 5 in den Tabellen beynahe ein Richtwinkel von $26\frac{1}{2}$ Grad.

3. In einer Gegend, die nahe an den Nordpol gränzt, wurde der Vorschlag gemacht, die dort herrschende Schwerkraft durch Bombenwürfe zu erforschen. Man warf unter 15° mit beybehaltener Ladung etlichemal, und das Mittel der Wurfweiten betrug 954 Schuh, so wie die mittlere Zeit der Dauer $3\frac{3}{4}$ Sekunden. Wie groß ist da die Schwerkraft, das heißt, wie weit fallen da die Körper in der ersten Sekunde?

Auflösung.

Die Formel ist hier zweifelsohne

$$g = \frac{w.\,tang.\,r}{d^2}$$

also $g = \frac{954\,.\,tang.\,15}{(3\frac{3}{4})^2}$

Den Logarithm von $(3\frac{3}{4})^2$ erhält man also

Log. 15	=	1.1760913
Log. 4	=	0.6020600
		0.5740313
× 2		1.1480626
Log. 954	=	2.9795484
Log. tang. 15	=	9.4280525
		2.4076009
		1.1480626
		1.2595373 = Log. 18,17

In der dortigen Gegend machen also die Körper im freyen Fall in der ersten Sekunde 18, 17 baiersche Schuh.

§. 53.

Zur Uebung. I. Eine Bombe, die unter dem Richtwinkel 23 Grad abgeschossen worden, bleibt $10\frac{1}{2}$ Sekunde in der Luft; wie weit wird sie getragen?

II. Ein fortgeschleuderter Stein bleibt 6 Sekunden in der Luft, und fällt in einer Entfernung von 160 Schuhen nieder; unter welchem Richtwinkel wurde er weggeworfen?

III. In einem Lande nahe am Aequator braucht ein Bombenwurf unter dem Richtwinkel von 45 Grad 13 Sekunden, und die Tragweite mißt 2535 Schuh; wie groß ist da die Schwerkraft?

§. 54.

Lehrsatz. Die Dauer eines Bombenwurfes kann auch, ohne Beyziehung der Tragweite, bloß

aus dem Richtwinkel und Probeschuß bestimmt werden. Es ist der

Satz.

$$d = \sin. r \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}}$$

Beweis.

$$d = \sqrt{\frac{w \,.\, \text{tang.}\, r}{g}}$$

aber $w = \mathfrak{P} \,.\, \sin. 2r$

substit. $d = \sqrt{\frac{\mathfrak{P} \,.\, \sin. 2r \,.\, \text{tang.}\, r}{g}}$

u. da ferner $\sin. 2r = \frac{2 \sin.^2 r}{\text{tang.}\, r}$

so ist $d = \sqrt{\frac{\mathfrak{P} \,.\, 2 \sin.^2 r}{g}}$

endlich $d = \sin. r \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}}$

§. 55.

Zusatz. Ist $r = 45$, so muß $d = \sqrt{\frac{\mathfrak{P}}{g}}$ seyn; weil $\sin. 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}} = \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{2g}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{P}}{g}}$$

§. 56.

Zusatz. Wenn $r = 30°$, so erhält man $d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}}$ oder $= \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{4g}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{P}}{2g}}$.

§. 57.

Anwendung. 1. Der größte Probeschuß hält in der Weite 3960 Schuh; wie lang wird die Bombe unter dem Richtwinkel von 13° in der Luft seyn?

Auflösung.

$$\text{Log. } 2 \times 3960 = \text{Log. } 7920 = 3.8987252$$
$$\text{Log. } 16,801 = 1.2253737$$
$$2.6733515$$
$$: 2 \qquad 1.3366757$$
$$\text{Log. sin. } 13 = 9.3520880$$
$$0.6887637$$
$$= \text{Log. } 4,884$$

Sekunden, also nicht gar 5 Sekunden.

2. Unter der Leitung des k. k. Artilleriemajors **von Vega** erreichte bey einer Prüfung i. J. 1796 zu Wien eine Bombe unter dem Richtwinkel von 45° eine Wurfweite von 9082 Wienerschuhen; wie lang war diese Bombe in der Luft?*)

*) Der Mörser war ein französischer Zehenzöller mit einem Rohr nach Angabe des Hrn. Gomer. Der Durchmesser der Bombe $10\frac{1}{6}$ Wienerzoll, ihr Gewicht 90 Wienerpfund, und das Gewicht des Pulvers 8 solche Pfund.

Auflösung.

Da sich der Wienerschuh zum rheinischen wie 14011 : 13913 verhält, so beträgt die besagte Wurfweite 9148 rheinische Schuh. Es muß also auch g im rheinischen Maaße genommen werden. Die Formel dazu ist $d = \sqrt{\frac{p}{g}}$. Daher

$$d = \sqrt{9148} : \sqrt{15,526} = \sqrt{589} = 24,3 \ldots;$$

also über 24 Sekunden.

§. 58.

Zur Uebung. 1. Wenn die Tragweite des größern Probeschußes 2718 Schuh hält, wie lang dauert der Wurf bey dem Richtwinkel von 64°?

2. Bey dem Versuch über die Tragweiten der neuen Mörser zu den k. k. dreyßigpfünder Bomben, nach Erfindung und Angabe des Herrn von Vega zu Mannheim im Jahre 1795, war unter dem Richtwinkel 45° die größte erreichte Distanz 9840 Wienerfuß; wie lang brauchte dieselbe zu ihrem Fluge?*)

*) Der Durchmesser der Bombe hatte 9 Zoll, ihr Gewicht 55 Pfund, und die Ladung $4\frac{1}{2}$ Pfund.

§. 59.

Lehrsatz. Die Dauerzeiten zweyer Bombenwürfe verhalten sich bey gleichen Umständen, wie die Sinusse ihrer Richtwinkel.

Satz.

$$d : D = \sin. r : \sin. R.$$

Beweis.

$$d = \sin. r \sqrt{\frac{2P}{g}}$$

$$D = \sin. R \sqrt{\frac{2P}{g}}$$

$$d : D = \sin. r \sqrt{\frac{2P}{g}} : \sin. R \sqrt{\frac{2P}{g}}$$

$$: \sqrt{\frac{2P}{g}}$$

$$d : D = \sin. r : \sin. R.$$

§. 60.

Anwendung. Unter dem Richtwinkel von 11° war die Dauer des Wurfes $3\frac{1}{2}$ Sekunde. Nun soll der Richtwinkel so geändert werden, daß die Wurfweite die nämliche bleibt; wie lang wird da der Wurf dauern?

Auflösung.

$$3,5 : x = \sin. 11° : \sin. 79°$$

$$\text{Log. sin. } 79 = 9.9919466$$
$$\text{Log. } 3,5 = 0.5440680$$
$$10.5360146$$
$$9.2812483$$
$$1.2547663 = \text{Log. } 17,98.$$

Also beynahe ganze 18 Sekunden.

§. 61.

Zur Uebung. Man warf zwo Bomben bey der nämlichen Ladung, einmal unter 18°, und einmal unter 68°. Das erstemal war die Dauer des Wurfes $5\frac{1}{4}$ Sekunde; wie groß war sie bey der zweyten?

§. 62.

Lehrsatz. Das Verhältniß der Schlagkräfte zweyer Bomben ist zusammengesetzt aus ihren Gewichtern, Sinussen der Richtwinkel, und Quadratwurzeln der Probeschüßen verschiedener Ladungen. Wenn q und Q die Schlagkräfte, P und p die Gewichter, dann Π und 𝔓 die beyderley Probeschüße bedeuten, so ist der

Satz.

$$q : Q = p . \sin. r \sqrt{\Pi} : P . \sin. R \sqrt{\mathfrak{P}}.$$

Beweis.

$$q : Q = pc : PC$$

da nun $c = 2gt$

also $q : Q = 2gtp : 2gTP$

$:2g$ $q : Q = tp : TP$

ferner ist $t = \sin. r\sqrt{\frac{2\Pi}{g}}$

und $T = \sin. R\sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}}$ §. 54.

folgl. $q : Q = p.\sin. r\sqrt{\frac{2\Pi}{g}} : P.\sin. R\sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{g}}$

$:\sqrt{\frac{2}{g}}$ $= p.\sin. r\sqrt{\Pi} : P.\sin. R\sqrt{\mathfrak{P}}$.

§. 63.

Anwendung. Ein Gewölb, das $1\frac{1}{2}$ Schuh dick war, wurde mit einer 60pfündigen Bombe unter verschiedenen Richtwinkeln (versteht sichs, daß allemal die Distanz geändert werden mußte) beschossen, und zwar mittels einer Ladung, die den größern Probeschuß 3966 Schuh forttrieb. Endlich unter den Richtwinkel von 54° schlug die Bombe durch. Nun soll mit einem Hundertpfünder ein Gewölb, das $2\frac{1}{2}$ Schuh dick ist, durchschlagen werden; welchen Richtwinkel be-

gehrt diese Foderung, wenn der grössere Probeschuß 4408 Schuh beträgt? Und wie weit muß der Mörser vom Ziel entfernt seyn?

Auflösung.

I. Nach gehöriger Substitution erhält man diesen Ausdruck:

$$1\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = 60 . \sin. 54^\circ . \surd 3966 : 100 . \sin. x \surd 4408$$

oder

$$1,5 : 2,5 = 6 . \sin 54^\circ \surd 3966 : 10 . \sin. x \surd 4408$$

und $\sin. x = \frac{2,5 . 6 . \sin. 54^\circ \surd 3966}{1,5 . 10 \surd 4408}$

Man suche allererst Logarithmen für die Wurzelgrössen.

$$\frac{\text{Log. } 3966}{2} = \frac{3.5983527}{2} = 1.7991763$$

$$= \text{Log. } \surd 3966$$

$$\frac{\text{Log. } 4408}{2} = \frac{3.6442416}{2} = 1.8221208$$

$$= \text{Log. } \surd 4408$$

Nun bestimme man den Logarithm des Divisors, dann des Dividends, und ziehe jenen von diesem ab.

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 1,5 &= 0.1760913 \\
\text{Log. } 10 &= 1 \\
\text{Log. } \sqrt{4408} &= 1.8221208 \\
&\ 2.9982121 \\
&\ 2.9682121
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 2,5 &= 0.3979400 \\
\text{Log. } 6 &= 0.7781512 \\
\text{Log. sin. } 54 &= 9.9079576 \\
\text{Log. } \sqrt{3966} &= 0.7991763 \\
&\ 12.8832251 \\
&\ 2.9982121 \\
&\ 9.8850130 = \text{Log. sin. } 76^\circ\, 53'
\end{aligned}$$

Beantwortung der ersten Frage.

II. Nach §. 20. ist $w = P \,.\, \text{sin. } 2r$,

daher $x = 4408 \,.\, \text{sin. } 2 \,.\, 76^\circ\, 53'$

$= 4408 \,.\, \text{sin. } 153^\circ\, 46'$

$= 4408 \,.\, \text{sin. } 26^\circ\, 14'$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } 4408 &= 3.6442416 \\
\text{Log. sin. } 26^\circ\, 14' &= 9.6454496 \\
&\ 3.2896912 = 1948 \text{ Schuh.}
\end{aligned}$$

Beantwortung der zweyten Frage.

§. 64.

Zusatz. Man hat also das Minimum des Richtwinkels, und das Maximum der ihm zugehörigen Wurfweite. Diese beyden Funktionen

können nun also nach Gefallen geändert werden, um die nämliche, oder noch eine stärkere Wirkung hervorzubringen.

Man nähere sich z. B. wenn es sich thun läßt, dem Gewölbe auf 1000 Schuh; welchen Richtwinkel hat man also nöthig? Es ist

$$w = \mathfrak{P} . \sin. 2r$$

$$1000 = 4408 . \sin. 2x$$

$$\frac{1000}{4408} = \sin. 2x$$

$$\text{Log. } 1000 = 3.$$

$$\text{Log. } 4408 = \underline{3.6442416}$$

$$9.3557584$$

$$= \text{Log. sin. } 13^\circ\ 8'$$

also $2x = 13^\circ\ 8'$

: 2 $x = 6^\circ\ 34'$.

Man trifft zwar auch das Gewölb unter diesem Richtwinkel, aber schmettern kann man es nicht, außer unter dem Komplementswinkel $90 - 6^\circ\ 34' = 83^\circ\ 26'$.

Daraus erhellet, daß auch der gefundene Richtwinkel $76^\circ\ 53'$ größer genommen werden könne, um sicherer durchzuschlagen, wozu aber die entsprechende Entfernung des Mörsers erst gesucht werden muß, um es auch zu treffen.

§. 65.

Zur Uebung. Die Dicke zweyer Gewölber verhalten sich, wie 3 : 5. Das erste wurde mit einem Fünfzigpfünder unter einem Richtwinkel von 48° 30′, da doch der größere Probeschuß nur 3772 Schuh betrug. Nun soll man das andere Gewölb mit einem Sibenzigpfünder einstürzen machen. Der kleinere Probeschuß hält 2690 Schuh; unter welchem Richtwinkel kann das geschehen? und welche Entfernung ist die größte dazu?

§. 66.

Zusatz. Will man die Schlagkräfte einer Bombe bey der nämlichen Ladung nur unter den beyden Richtwinkeln der Ergänzung miteinander vergleichen, so giebt allemal die Kotangente des kleinern Richtwinkels an, wie vielmal größer die Schlagkraft unter dem Richtwinkel der Ergänzung ausfalle.

Satz.

$$Q = \text{cotang. } r.$$

Beweis.

$$q : Q = p . \sin. r \sqrt{\pi} : P . \sin. R \sqrt{\mathfrak{P}}$$

da aber $p = P$ und $\Pi = \mathfrak{P}$

so ist $q : Q = \sin. r : \sin. R$

ferner ist $\sin. R = \cos. r$

und weil $q = 1$ gesetzt werden muß,

$$1 : Q = \sin. r : \cos. r$$

$$Q = \frac{\cos. r}{\sin. r}$$

allein $\frac{\cos. r}{\sin. r} = \text{cotang. } r$

also $Q = \text{cotang. } r.$

§. 67.

Anwendung. Um wie vielmal wirkt eine Bombe beym Auffallen stärker, wenn sie unter dem Ergänzungswinkel von 15° geworfen wird, als wenn man sie unter dem Richtwinkel von 15° selbst abfeuern würde?

Auflösung.

Es darf hier bloß die Kotangente von 15° in den Tabellen nachgeschlagen werden, so findet man $Q = 3,73205\ldots$ also beynahe viermal stärkere Wirkung.

§. 68.

Zur Uebung. Es wird eine Bombe unter 8° geworfen, wie viel größer wird

die Schlagkraft unter dem Winkel von 82° seyn?

§. 69.

Lehrsatz. Die Längen der Brandröhre bey verschiedenen Würfen und Ladungen müssen sich wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der Wurfweiten in die Tangenten ihrer Richtwinkel verhalten. Wenn also l und L die Längen der Brandröhre vorstellen, so heißt der

Satz

$$l : L = \sqrt{w \,.\, \text{tang.}\, r} : \sqrt{W \,.\, \text{tang.}\, R}.$$

Beweis.

Da das Brandrohr während dem Fluge der Bombe immer gleichförmig fortbrennt, so muß nothwendig die Länge desselben mit der Dauer des Wurfes im Verhältniß stehen. Mithin

$$l : L = d : D$$

aber $$d : D = \sqrt{\frac{w \,.\, \text{tang.}\, r}{g}} : \sqrt{\frac{W \,.\, \text{tang.}\, R}{g}}$$

$$l : L = \sqrt{\frac{w \,.\, \text{tang.}\, r}{g}} : \sqrt{\frac{W \,.\, \text{tang.}\, R}{g}}$$

oder $$l : L = \frac{\sqrt{w \,.\, \text{tang.}\, r}}{\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{W \,.\, \text{tang.}\, R}}{\sqrt{g}}$$

$$\times \sqrt{g} \quad l : L = \sqrt{w \,.\, \text{tang.}\, r} : \sqrt{W \,.\, \text{tang}\, R}.$$

§. 70.

Zusatz. Man kann auch diesen Satz so vortragen: **Die Quadrate aus den Längen der Brandröhre stehen im zusammengesetzten Verhältniß mit den Tragweiten und Richtwinkeln.**

$$l^2 : L^2 = w . \text{tang. } r : W . \text{tang. } R.$$

§. 71.

Erfahrungssatz. Für eine Wurfweite von 6000 Schuh unter dem Richtwinkel 45° muß die Brandröhre 9 Zoll lang seyn.

§. 72.

Lehrsatz. Wenn b = 0, 1162 . . . *) so kann mit Beyziehung des Probeschußes für jeden Richtwinkel die erfoderliche Länge der Brandröhre bestimmt werden. Es ist der

Satz

$$l = b . \sin. r \sqrt{2P}$$

oder $$l = 2 b \sin. r \sqrt{p}.$$

*) Der Logarithm der Decimal 0, 1162 kann entweder aus einem negativen Kennziffer und positiver Mantisse bestehen, und dann heißt er — 1, + 0652061, oder er kann ganz negativ erhalten werden, in welch' letzterm Fall' er — 0. 9347939 ist.

Beweis.

$$1 : L = \sqrt{w.\tan r} : \sqrt{W.\tan R}$$

Wenn nun $W = 6000$ und $R = 45$,

so ist $L = 9$ Zoll.

Daher $1 : 9 = \sqrt{w.\tan r} : \sqrt{6000}$

$$1.\sqrt{6000} = 9\sqrt{w.\tan r}$$

aber $w = P.\sin 2r$ oder $= 2p.\sin 2r$,

subst. $1.\sqrt{6000} = 9\sqrt{P.\sin 2r.\tan r}$

oder $= 9\sqrt{2p.\sin 2r.\tan r}$

da ferner $\sin 2r = \frac{2\sin^2 r}{\tan r}$

so ist $1.\sqrt{6000} = 9\sqrt{P.2\sin^2 r}$

oder $= 9\sqrt{4p.\sin^2 r}$;

daher $1.\sqrt{6000} = 9\sin r\sqrt{2P}$

oder $= 2.9\sin r\sqrt{p}$

endlich $1 = \frac{9\sin r\sqrt{2P}}{\sqrt{6000}}$

oder $1 = \frac{2.9\sin r\sqrt{p}}{\sqrt{6000}}$

und weil $\frac{9}{\sqrt{6000}} = \frac{9}{77,48} = 0,1162.. = b$

$$1 = b.\sin r\sqrt{2P}$$

oder $1 = 2b\sin r\sqrt{p}$.

§. 73.

Anwendung. Wie lang muß das Brandrohr bey dem Richtwinkel von

26° seyn, wenn der größere Probeschuß 4561 Schuh betrug?

Auflösung.

Log. 2.4561 = Log. 9122 = 3.9601377
:2 1.9800688
Log. sin. 26 = 9.6418420
Log. 0, 1162 = 1.0652061

1.6871169
= Log. 4, 866...

Folglich nicht gar 5 Zoll.

§. 74.

Zur Uebung. Der kleinere Probeschuß hielt 1805 Schuh. Man soll unter dem Richtwinkel von 72° werfen; wie groß muß das Brandrohr seyn?

§. 75.

Zusatz. Man begreift leicht, daß man auch aus der Länge des Brandrohrs, das zu einem Wurfe gebraucht werden soll, und aus dem Probeschuß, auf den Richtwinkel schließen könne; denn durch Versetzung der Formel erhält man sehr bald

$$\sin. r = \frac{1}{b \sqrt{2P.}}$$

§. 76.

Zusatz. Ist neben der Länge des Brandrohrs der Richtwinkel bekannt, so kann auch eben so leicht auf die Größe des Probeschußes zurück gefolgert werden, falls man dergleichen Rechnungen nöthig hätte.

§. 77.

Lehrsatz. Bey einer und der nämlichen Ladung verhalten sich die Längen der Brandröhre sehr einfach wie die Sinusse der Richtwinkel.

Satz.

$$1 : L = \sin. r : \sin. R.$$

Beweis.

$$d : D = \sin. r : \sin. R$$

aber $1 : L = d : D$

also $1 : L = \sin. r : \sin. R.$

§. 78.

Anwendung. Beym Richtwinkel von 22° 30′ mußte das Brandrohr $5\frac{1}{2}$ Zoll lang seyn; welche Länge muß es bekommen, wenn man unter dem Richtwinkel von 17° werfen will?

Auflösung.

$$5,5 : x = \sin. 22^\circ\ 30' : \sin. 17$$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 5,5 = & 0,7403627 \\ & \underline{9.4659353} \\ & 10.2062980 \\ & \underline{9.5828397} \\ & 0.6234583 = \text{Log. } 4,2 \end{array}$$

Also $4\frac{1}{5}$ Zoll.

§. 79.

Zur Uebung. Wenn beym Richtwinkel 68° das Brandrohr 17 Zoll lang seyn mußte, wie lang darf es bey einem andern Wurfe seyn, der zwar die Höhe der Parabel, aber nicht die Schußweite ändert?

§. 80.

Erfahrung. Wenn man die Ladung eines Mörsers, bey übrigens gleichen Umständen, immer verändert, und die daraus erfolgenden Wurfweiten miteinander vergleicht; so findet man, daß sie mit den zugehörigen Ladungen in keinem Verhältnisse stehen: sondern daß einer steigenden Reihe von Ladungen zwar auch eine steigende Reihe von Wurfweiten entspreche, wovon aber das Gesetz

dieser Reihe nicht bekannt ist. Zum Beweis diene eine Thatsache. Ein 60pfündiger Mörser machte unter dem Richtwinkel von 10°, folglich auch von 80° bey nachstehenden Ladungen die darneben gesetzten Wurfweiten.

Ladung.			Wurfweite.
℔	Loth.		Schritt. *)
1	20	. . . .	178
1	24	. . . .	336
2	16	. . . .	492
3	4	. . . .	616
3	12	. . . .	775
4	16	. . . .	869 u. s. f.

§. 81.

Aufgabe. Aus etlichen gegebenen Wurfweiten und den zugehörigen Ladungen für jede andere Ladung, derer Größe zwischen die gegebenen hineinfällt, die entsprechende Wurfweite zu bestimmen.

Auflösung.

Um zu machen, daß die zu suchende Wurfweite sehr vielfältig von den gegebenen Größen

*) Der Schritt ist zu 22 rheinische Zoll gerechnet.

abhänge, so drücke man sie nach Hrn. von Vegas Beyspiele*) durch diese Reihe aus:

$$xP + yP^2 + zP^3 \ldots = \beta,$$

oder wenn man lieber will

$$Px + P^2y + P^3z \ldots = \beta,$$

wo P das Gewicht der Ladung, β die entsprechende Wurfweite, und x, y, z u. s. f. unbekannte Coefficienten sind, welche aus den Angaben folgender Massen bestimmt werden müssen.

Gesetzt, bey n Lothen Pulver ist die Wurfweite w, bey N Lothen W; bey 𝔑 Lothen 𝔚 u. s. f. Man bekömmt demnach so viele Gleichungen als Angaben sind; denn nach dem obigen Modell ist:

*) Herr von Vega, und nach ihm Gernrath bedienen sich bey dieser Berechnung der Formel $An + Bn^2 + Cn^3 \ldots$ und substituiren statt n sogleich die verschiedenen Ladungen von 5 gegebenen Fällen. Ich nahm es auf mich, der Sache eine allgemeinere Gestalt zu ertheilen, und suchte die Coefficienten in Universalformeln auszudrücken. Weil aber dadurch das Geschäft etwas weitläufig wird, so begnügte ich mich, nur für Angaben von dreyen Fällen gesorgt zu haben. Wer diesen Weg auch für mehrere Fälle einschlagen will, dem giebt die Analogie sattsame Fingerzeige.

$$\text{I.}\quad nx + n^2y + n^3z = w.$$

$$\text{II.}\quad Nx + N^2y + N^3z = W.$$

$$\text{III.}\quad \mathfrak{N}x + \mathfrak{N}^2y + \mathfrak{N}^3z = \mathfrak{W}.$$

Folglich

$$x = \frac{w}{n} - ny - n^2z$$

$$x = \frac{W}{N} - Ny - N^2z$$

$$x = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N}y - \mathfrak{N}^2z.$$

IV.

$$\frac{w}{n} - ny - n^2z = \frac{W}{N} - Ny - N^2z$$

verſ. $$Ny - ny = \frac{W}{N} - \frac{w}{n} + n^2z - N^2z = \frac{W}{N} - \frac{w}{n} - (N^2 - n^2)z$$

$$:(N - n) \qquad y = \left(\frac{W}{N} - \frac{w}{n}\right) : (N - n) - (N + n)z.$$

V.

$$\frac{w}{n} - ny - n^2 z = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N} y - \mathfrak{N}^2 z$$

$$\mathfrak{N} y - ny = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n} - (\mathfrak{N}^2 - n^2) z$$

$$y = \left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right) : (\mathfrak{N} - n) - (\mathfrak{N} + n) z$$

VI.

$$\left(\frac{W}{N} - \frac{w}{n}\right) : (N - n) - (N + n) z = \left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right) : (\mathfrak{N} - n) - (\mathfrak{N} + n) z$$

$$(\mathfrak{N} + n - N - n) z = \left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right) : (\mathfrak{N} - n) - \left(\frac{W}{N} - \frac{w}{n}\right) : (N - n)$$

$$z = \frac{\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right) : (\mathfrak{N} - n) - \left(\frac{W}{N} - \frac{w}{n}\right) : (N - n)}{\mathfrak{N} - N}$$

Würde man nun diesen Werth von z auch in einem der Ausdrücke von y, und diesen wieder in einem von x substituiren, so gäbe es riesenmäßige Reihen von der manigfaltigsten Zusammensetzung ab. Es wird daher am beßten seyn, wenn man bey der wirklichen Berechnung zuerst den Koefficienten z sucht, und mit Hilfe desselben auch die übrigen rückwärts bestimmt. Man trage demnach die gefundnen drey Ausdrücke in die Formel $zP^3 + yP^2 + xP = \beta$ hinüber, so erscheint

$$\frac{\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right)(\mathfrak{N} - n) - \left(\frac{W}{N} - \frac{w}{n}\right) : (N + n)}{\mathfrak{N} - N} P^3 +,$$

$$\left[\left(\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{N}} - \frac{w}{n}\right) : (\mathfrak{N} - n) - (\mathfrak{N} - n)\right] zP^2 + \left(\frac{w}{n} - ny - n^2 z\right) P = \beta.$$

§. 82.

Anwendung. Unter dem Richtwinkel von 45° (ein wirklicher Fall) warf man mit einer Ladung von 1 ℔ 20 Loth mit einem Sechzig-

pfünder 520 Schritt weit, bey 2 ℔ 24 Loth 1040 Schritt, und bey 4 ℔ 16 Loth 2540 Schritt; wie groß wird die Wurfweite bey der Ladung von 1 ℔ 21 Loth seyn?

Auflösung.

Hier ist $n = 52$ Loth.

$w = 520$ Schritt.

$N = 56$ Loth.

$W = 1040$ Schritt.

$\mathfrak{N} = 144$ Loth.

$\mathfrak{W} = 2540$ Schritt.

Und $P = 53$ Loth.

Man bestimme allererst den Werth von z!

$$z = \frac{\left(\frac{2540}{144} - \frac{520}{52}\right) : (144 - 52) - \left(\frac{1040}{56} - \frac{520}{52}\right) : (56 - 52)}{144 - 56}$$

$$z = \frac{(17,6388888\ldots - 10) : 92 - (18,5714285\ldots - 10) : 4}{88}$$

$$= \frac{0,0830314 - 2,1428576}{88} = 0,0235207\ldots$$

Es werde auf gleiche Weise auch y bestimmt!

$$y = 0,0830314 - (144 + 52) \cdot -0,0235207 = 0,0830314 - 196 \cdot -0,02305207$$

$$= 0,0830314 + 4,6100572 = 4,6930886\ldots$$

Und endlich x!

$$x = 10 - 50 \cdot 4,9930886 - 2704 \cdot - 0,0235207 = - 170,4406344\ldots$$

Die Hauptgleichung heißt nun so:

$$- 0,0235207 \cdot (53)^3 + 4,6930886 \cdot (53)^2 - 170,4406344 \cdot 53 = \beta$$

$$- 3501,58 + 13182,63 - 9033,32 = \beta$$

$$647 = \beta.$$

§. 83.

Zur Uebung. Was für eine Wurfweite gehört der Ladung von 55 Loth, wenn 40 Loth 420 Klafter weit treiben, 50 Loth 550 Klafter, und 60 Loth 650 Klafter?

§. 84.

Anmerkung. Diese Art zu kalkuliren hat in meinen Augen dem ungeachtet ihre Bedenklichkeiten. Denn will man bey gegenwärtigen Angaben die Wurfweite für 100 Loth berechnen, so kommen 6366 Schritt heraus, welche beynahe dreymal größer wäre als von 144 Loth. Es müßte also die Wurfweite von der Ladung 100 Loth bis zur Ladung 144 Loth wieder abnehmen, welches für meinen Verstand sehr unbegreiflich läßt. Jedoch salvo meliori!

§. 85.

Zusatz. Wollte man umgekehrt von der Wurfweite auf die Ladung schließen, so hätte man nebenher noch die mühsame Auflösung höherer Gleichungen anzuwenden; denn da verwandelt sich in **Vegas** Reihe $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$

$+ En^s$ ꝛc. das n in x um, und es erscheint schon bey drey Angaben die unreine kubische Gleichung $Ax + Bx^2 + Cx^3 = \beta$. Um nichts unversucht zu lassen, schränken wir die Sache bloß auf zwey Aufgaben ein, und berechnen folgendes

§. 86.

Problem. Mit der Ladung 52 Loth wirft man 260 Schritt, und mit 56 Loth 520 Schritt; wie groß muß die Ladung seyn, damit der Wurf 300 Schritt erreicht?

Auflösung.

Wenn statt den unbekannten Koefficienten A und B etwa y und z genommen werden, so erscheinen, um sie zu bestimmen, diese 2 Gleichungen:

I.

$$52y + 52^2 z = 260$$

$$:52 \qquad y + 52z = 5$$

$$y = 5 - 52z$$

II.

$$56y + 3136z = 520$$

$$:8 \qquad 7y + 392z = 65$$

$$y = \frac{95 - 392z}{7}$$

III.

$$5 - 52z = \frac{65 + 393z}{7}$$

$$\times 7 \quad 25 - 364z = 65 - 292z$$

$$\underline{-35 + 392z = -35 + 392z}$$

$$28z = 30$$

$$:28 \qquad z = \frac{30}{28} = \frac{15}{14}$$

$$= 1,071428 \ldots$$

Diesen Werth in $y = 5 - 52z$ substituirt, giebt $y = 5 - 55,714 = - 50,714$.

Wir haben nun die Koefficienten für die Gleichung $yP + zP^2 = \beta$; es darf also nur substituirt werden

$$1,071428\,x^2 - 50,714\,x = 400$$

$$:1,0714 \qquad x^2 - 47,37\,x = 373,33$$

$$+ (23,68)^2 = 560,74$$

$$x^2 - 47,37\,x + (23,68)^2 = 934,07$$

$$\sqrt{\ } \qquad x - 23,68 = 30,05$$

$$23,68 \qquad 23,68$$

Antw. $x = 53,72$ Loth.

§. 87.

Zur Uebung. Wenn zwo Ladungen, als 87 und 95 Loth, die nämliche Bombe

1742 und 3280 Schritt weit tragen; welche Ladung trägt eben diese Bombe 2500 Schritt?

§. 88.

Anmerkung. Bisher waren immer solche Bombenwürfe der Gegenstand unsrer Betrachtung, wo die Mündung des Mörsers mit dem Ziel in einer Horizontallinie liegen. Nun gehen wir auch auf solche Fälle über, wo das Ziel beträchtlich höher oder tiefer liegt als die Batterie, von welcher aus es beschossen werden soll.

§. 89.

Aufgabe. Um eine Bombe auf eine verlangte Höhe zu werfen, soll die eigentliche horizontale Schußweite und die Höhe des dazu gehörigen Wurfes durch Zeichnung ausfindig gemacht werden.

Auflösung.

Man theile den Horizontalabstand, der sich geometrisch oder trigonometrisch bestimmen läßt, so wie auch die Höhe selbst, welche ebenfalls durch Ingenieurkenntnisse gefunden werden kann, in 3 gleiche

Theile, setze auf den zweyten Theilungspunkt des Horizontalabstandes $\frac{4}{3}$ der Höhe, so wird dieß die Höhe des Wurfes, und $\frac{4}{3}$ des Abstandes die eigentliche horizontale Wurfweite geben. Es muß nun Fig. 9. erwiesen werden, daß a der Scheitel, dann k und o Punkte in einer Parabel sind.

Satz.

$$ck^2 : po^2 = ac : ap.$$

Beweis.

$$ck : po = \frac{mn}{3} : \frac{2mn}{3}$$

: mn $= \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$

×3 $= 1 : 2$

Quadr. $ck^2 : po^2 = 1 : 4$

aber $ac : ap = \frac{cp}{3} : cp + \frac{cp}{3}$

$= \frac{cp}{3} : \frac{4cp}{3}$

×3 $ac : ap = cp : 4cp$

: cp $= 1 : 4$

also $ck^2 : po^2 = ac : ap.$

§. 90.

Zusatz. Wenn demnach die Entfernung einer solchen Höhe $= e$, und die Höhe selbst $= h$

gesetzt wird, so wird allemal $\frac{4e}{3}$ die dazu gehörige Schußweite, und $\frac{4h}{3}$ die Höhe der Parabel seyn.

§. 91.

Lehrsatz. Die Tangente des Richtwinkels ist demnach allemal die vierfache Höhe getheilt durch die Entfernung.

Satz.

$$\text{tang. } r = \frac{4h}{e}$$

Beweis.

Es ist $a = \frac{w \cdot \text{tang. } r}{4}$ §. 38.

da nun $a = \frac{4h}{3}$ und $w = \frac{4e}{3}$

so wird subst. $\frac{4h}{3} = \frac{4e}{3} \times \frac{\text{tang. r.}}{4}$

abgek. $4h = e \cdot \text{tang } r$

$\frac{4h}{e} = \text{tang. r.}$

§. 92.

Lehrsatz. Der größere Probeschuß muß aber genau allemal der Summe aus dem Quadrat der Entfernung, und dem sechzehnfachen Quadrat der Höhe getheilt durch die sechsfache Höhe gleich

seyn, wenn je die nämliche Parabel unter dem berechneten Richtwinkel von der Bombe beschrieben werden soll.

Satz.

$$\mathfrak{P} = \frac{e^2 + 16h^2}{6h}$$

Beweis.

Weil $\frac{2e}{3}$ eine Ordinate, und $\frac{4h}{3}$ die entsprechende Abscisse ist, so kann in der Gleichung $y^2 = px$ substituirt werden.

$$\frac{4e^2}{9} = \frac{4h}{3} \times p$$

$$:4 \qquad \frac{e^2}{9} = \frac{hp}{3}$$

$$\times 3 \qquad \frac{e^2}{9} = hp$$

$$:h \qquad \frac{e^2}{3h} = p$$

$$:4 \qquad \frac{e^2}{12h} = \tfrac{1}{4}p$$

$$\text{aber} \qquad \frac{4h}{3} = x$$

$$\text{add.} \qquad \frac{e^2}{12h} + \frac{4h}{3} = x + \tfrac{1}{4}p$$

$$\text{und} \qquad \frac{e^2 + 16h^2}{12h} = x + \tfrac{1}{4}p$$

$$\times 2 \qquad \frac{e^2 + 16h^2}{6h} = 2(x + \tfrac{1}{4}p) = \mathfrak{P} \text{ §.16.}$$

$$\text{also} \qquad \mathfrak{P} = \frac{e^2 + 16h^2}{6h}$$

§. 93.

Anwendung. In einer Entfernung der Batterie von 1000 Schuhen befindet sich ein 100 Schuh hoher Thurm, welcher zerschmettert werden soll. Fragt sich erstens: Wie weit muß der Probeschuß reichen? zweytens: Welcher Richtwinkel ist dazu zu gebrauchen?

Auflösung.

I.

Da hier $e = 1000$ und $h = 100$, so ist

$$p = \frac{1000^2 + 16 . 100^2}{600} = \frac{1000000 + 160000}{600}$$

$$= \frac{1160000}{600} = 1933\tfrac{1}{3}$$ Schuh muß der größere, oder $966\frac{1}{2}$ der kleinere Probewurf halten.

II.

$$\text{tang. } r = \frac{4h}{e} = \frac{400}{1000} = 0,4;$$

welcher Tangente in den Tafeln ein Richtwinkel von 21° 49′ entspricht.

§. 94.

Zur Uebung. Ein Bergschloß liegt 250 Schuh höher als die Batterie, und

790 Fuß entfernt; wie müssen Probeschuß und Richtwinkel beschaffen seyn, um dieses Schloß durch Bomben zerstören zu können?

§. 95.

Zusatz. Ist der Probeschuß gegeben, so kann auch für eine verlangte Höhe die entsprechende Entfernung gefunden werden; welche Aufgabe in solchen Fällen taugt, wo es verstattet ist den Ort der Batterie selbst zu wählen. Es heißt der

Satz

$$e = \sqrt{2h(3\mathfrak{P} - 8h)}$$

Beweis.

$$\frac{e^2 + 16h^2}{6h} = \mathfrak{P}$$

$\times 6h$ $\quad e^2 + 16h^2 = 6h\mathfrak{P}$

versetzt $\quad e^2 = 6h\mathfrak{P} - 16h^2$

oder $\quad e^2 = 2h(3\mathfrak{P} - 8h)$

$\sqrt{\ }$ $\quad e = \sqrt{2h(3\mathfrak{P} - 8h)}$

§. 96.

Anwendung. Gesetzt der größere Probewurf einer Bombenladung halte 6280 Schuh. Es soll auf eine Höhe von

92 Schuh geworfen werden. Nun ist die Frage erstens: In welcher Entfernung muß die Batterie angelegt werden? zweytens: Was für ein Richtwinkel leistet dieß?

Auflösung.

I.

$$e = \sqrt{2 . 92 (3 . 6480 - 8 . 92)}$$
$$= \sqrt{184 (19440 - 736)}$$
$$= \sqrt{184 . 18704}$$
$$= \sqrt{3441536} = 1800 \text{ Schuh allernächstens.}$$

II.

$$\text{tang. } r = \frac{4 . 92}{1800} = \frac{368}{1800}$$
$$= 0,204; \text{ folglich } r = 11^\circ\ 32'.$$

§. 97.

Zur Uebung. Der größere Probeschuß hält 8144 Schuh; man soll eine Bergfestung, die 124 Schuh hoch ist, bombardiren, welche Entfernung ist hier zu wählen, und welcher Richtwinkel trägt die Bomben dahin?

§. 98.

Aufgabe. Gesetzt, man trifft unter einem Richtwinkel, der kleiner als 45° ist, das Höhenobjekt; wie weit muß der Mörser zurückgesetzt werden, damit man das nämliche Objekt treffen, und eine größere Zerstörung anrichten könne?

Auflösung.

Man trage (Fig. 10.) die höhere Parabel so weit zurück, bis die Kurve durch den Punkt b geht, so bleibt dem ungeachtet

$$dk = fl$$

abgezogen $$fk = fk$$

in der Fig. $$df = kl$$

aber $kl = gl - gk$, das ist $hl = \frac{e}{3} - v$, wenn gk durch v ausgedrückt wird.

also $df = \frac{e}{3} - v$, ferner $df = mc$; folglich $mc = \frac{e}{3} - v$.

Nun ist $y = mc + cb$, das ist $= \frac{e}{3} - v + \frac{e}{3} = \frac{2e}{3} - v$

und $x = nd - md$, das ist $= \frac{\mathfrak{P}\,\text{sin.}^2 R}{2} - h$ oder $x = \frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r}{2} - h$

$Y = df + fk$ oder $= \frac{e}{3} + \frac{e}{3} + v = \frac{2e}{3} + v$

$X = \frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r}{2}$

da aber $y^2 : Y^2 = x : X$

$\left(\frac{2e}{3} - v\right)^2 : \left(\frac{2e}{3} + v\right)^2 = \left(\frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r}{2} - h\right) : \frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r}{2}$

oder $\left(\frac{2e - 3v}{3}\right)^2 : \left(\frac{2e + 3v}{3}\right)^2 = \frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r - 2h}{2} : \frac{\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r}{3}$

$(4e^2 - 12ev + 9v^2) : (4e^2 + 12ev + 9v^2) = (\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r - 2h) : \mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r$

$4e^2 \mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r - 12ev\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r + 9v^2 \mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r = 4e^2 \mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r + 12ev\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r$
$+ 9v^2 \mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r - 8e^2 h - 24ehv - 18ev^2$

abgek. $- 6ev\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r = 6ev\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r - 4e^2 h - 12ehv - 9hv^2$

versetzt $9hv^2 - 12ev\mathfrak{P}\,\text{cos.}^2 r + 12ehv = -4e^2 h$

: 9h $\quad v^2 - \frac{12 e v \mathfrak{P} \cos.^2 r + 12 e h v}{9h} = - \frac{4 e^2 h}{9h}$

oder $\quad v^2 - \frac{4 e v \mathfrak{P} \cos.^2 r + 4 e h v}{3h} = - \frac{4 e^2}{9}$ kompl.

$$v^2 - \left(\frac{4 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 4 e h}{3h}\right) v + \left(\frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h}\right)^2 = \left(\frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h}\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}$$

$\surd \quad v - \frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h} = \sqrt{\left(\frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h}\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}}$

vers. $\quad v = \frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h} \pm \sqrt{\left(\frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r - 2 e h}{3h}\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}}$

oder $\quad v = \frac{2e}{3h}(\mathfrak{P} \cos.^2 r - h) \pm \sqrt{\left(\frac{2e}{3h}(\mathfrak{P} \cos.^2 r - h)\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}}.$ Es muß der Mörser um $\frac{e}{3} - \frac{2e}{3h}(\mathfrak{P} \cos.^2 r - h) \pm \sqrt{\left(\frac{2e}{3h}(\mathfrak{P} \cos.^2 r - h)\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}}$ zurückgesetzt werden, welcher Ausdruck durch die Abkürzung sich in diesen verwandeln läßt:

$$e - \frac{2 e \mathfrak{P} \cos.^2 r}{3h} \pm \sqrt{\left(\frac{2 e (\mathfrak{P} \cos.^2 r h)}{3h}\right)^2 - \frac{4 e^2}{9}}$$

§. 99.

Aufgabe. Eine Bombe ist in eine gegebene Tiefe zu werfen.

Auflösung.

Man bestimme durch Hilfe der Meßkunde den Horizontalabstand und die Tiefe, theile beyde in 3 gleiche Theile, setze den dritten Theil der Tiefe auf den ersten Theilungspunkt des Horizontalabstandes vom Mörser an gerechnet, so wird das gegebene Tiefenobjekt in einer Parabel liegen, derer Tangential- und Scheitelpunkt bekannt sind.

Satz. Fig. II.

$$ck^2 \; pm^2 = ac : ap.$$

Beweis.

$$ck : pm = \frac{fm}{3} : \frac{2fm}{3}$$

$: \frac{fm}{3}$ $$ck : pm = 1 : 2$$

Quadr. $$ck^2 : pm^2 = 1 : 4$$

aber auch $$ac : ap = \frac{cp}{3} : \left(cp + \frac{cp}{3}\right)$$

$$= \frac{cp}{3} : \frac{4cp}{3}$$

$: \frac{cp}{3}$ $$ac : ap = 1 : 4$$

also $$ck^2 : pm^2 = ac : ap$$

§. 100.

Zusatz. Setzt man wieder wie vorher die Entfernung einer solchen Tiefe $= e$, die Tiefe selbst $= t$, so wird allemal $\frac{2e}{3}$ die dazu gehörige Schußweite, und $\frac{t}{3}$ die Höhe der Parabel seyn.

§. 101.

Lehrsatz. Die Tangente des Richtwinkels ist hier allemal die doppelte Tiefe durch die Entfernung getheilt.

Satz.

$$\text{Tang.}\, r. = \frac{2t}{e}$$

Beweis.

Es ist $a = \frac{w \,.\, \text{tang.}\, r}{4}$

Da nun hier $a = \frac{t}{3}$, und $w = \frac{2e}{3}$, so substituire man gehörig, giebt

$$\frac{t}{3} = \frac{\frac{2e}{3} \,.\, \text{tang.}\, r}{4}$$

$\times 3$ $$t = \frac{2e \,.\, \text{tang.}\, r}{4}$$

verkl. $$t = \frac{e \,.\, \text{tang.}\, r}{2}$$

$\times 2$ $$2t = e \,.\, \text{tang.}\, r$$

$: e$ $$\frac{2t}{e} = \text{tang.}\, r.$$

§. 102.

Lehrsatz. Der größere Probeschuß muß aber allemal der Summe aus dem Quadrat der Entfernung, und dem vierfachen Quadrat der Tiefe, getheilt durch die sechsfache Tiefe, gleich seyn.

Satz.

$$\mathfrak{P} = \frac{e^2 + 4t^2}{6t}$$

Beweis.

Da $\frac{e}{3}$ eine Ordinate, und $\frac{t}{3}$ die entsprechende Abscisse vorstellt, so ist, weil in der Parabel $y^2 = px$,

$$\frac{e^2}{9} = \frac{t}{3} \times p$$

$$\times 3 \qquad \frac{e^2}{3} = tp$$

$$:t \qquad \frac{e^2}{3t} = p$$

$$:4 \qquad \frac{e^2}{12t} = \tfrac{1}{4}p$$

$$\frac{t}{3} = x$$

$$+ \qquad +$$

$$\frac{e^2}{12t} + \frac{t}{3} = x + \tfrac{1}{4}p$$

oder $$\frac{e^2 + 4t^2}{12t} = x + \tfrac{1}{4}p$$

$$\times 2 \qquad \frac{e^2 + 4t^2}{6t} = 2(x + \tfrac{1}{4}p)$$

aber $2(x + \frac{1}{4}p) = \mathfrak{P}$

also $\frac{e^2 + 4t^2}{6t} = \mathfrak{P}.$

§. 103.

Zusatz. Ist der Probeschuß als bekan
zusehen, so kann auch hier, wenn es je Di
verstattet, die Entfernung geändert werden.
gilt der

Satz

$$e = \sqrt{2t(3\mathfrak{P} - 2t)}$$

Beweis.

$$\frac{e^2 + 4t^2}{6t} = p$$

$\times 6t$ $\quad e^2 + 4t^2 = 6t\mathfrak{P}$

verſ. $\quad e^2 = 6t\mathfrak{P} - 4t = 2t(3\mathfrak{P} -$

$\sqrt{}$ $\quad e = \sqrt{2t(3\mathfrak{P} - 2t)}.$

AMBERG,
gedruckt mit Kochischen Schriften.

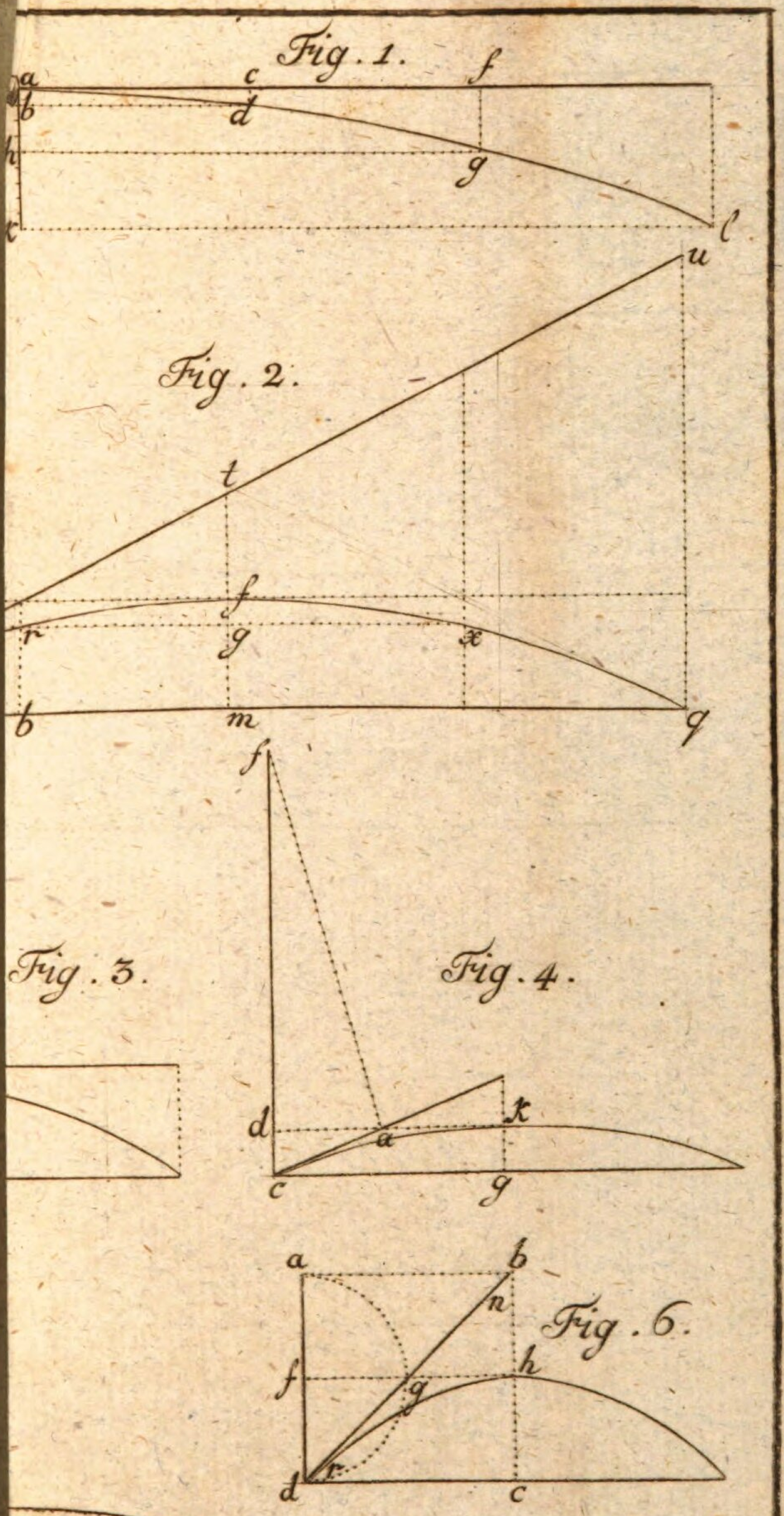

Fig. 1.
a c f
b d
h g
k l
u
Fig. 2.
t
f
r g x
b m q
f
Fig. 3.
Fig. 4.
d k
a
c g
a b
n
Fig. 6.
f h
g
r
d c

Prändel, Johann Georg,

Die Ballistik oder Anwendung der Parabellehre auf das Bombenwerfen

München 1801

App.mil. 104
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10255982-4